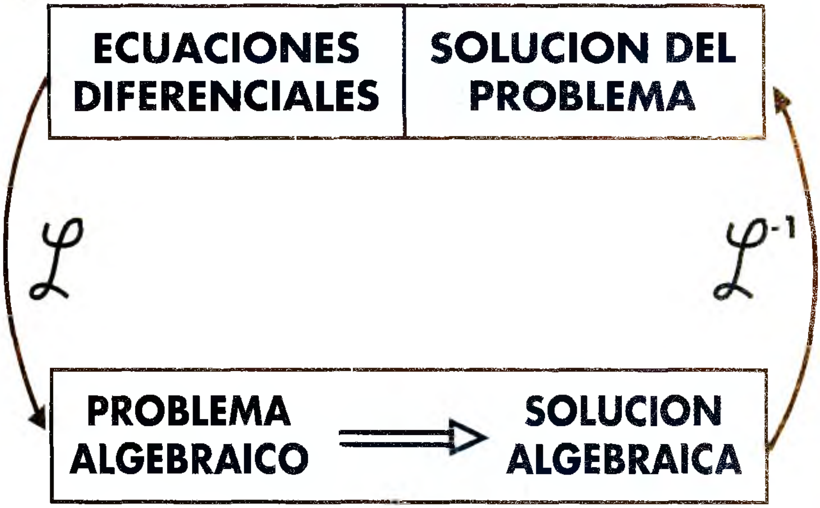
Transformada de Laplace



$$\mathcal{L}\left\{F(t)\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, F(t)\, dt = f(s)$$

EDUARDO ESPINOZA RAMOS

IMPRESO EN EL PERU **2da. Edición**

15-10-97

RUC	:	Nº 19369978
Escritura Pública	:	Nº 4484
Registro Comercial	:	Nº 10716
Ley de Derecho del Autor	:	Nº 13714

DEDICATORIA

Este libro lo dedico a mis hijos **RONALD** y **JORGE**, que Dios ilumine sus caminos para que puedan ser guías de sus prójimos.

PROLOGO

En la presente obra intitulada " Transformada de Laplace " en su 2da. Edición, he dado un trato especial al estudio de esta materia por ser de uso cotidiano en las carreras profesionales de Ciencias Matemáticas e Ingeniería.

Expongo una teoría concreta con problemas que motivan la solución de otros ejercicios que se proponen. La selección de los temas en cada capítulo es a base de la experiencia adquirida en la docencia universitaria y con las sugerencias brindadas por los colegas del área de matemáticas de las diversas universidades de la capital.

El libro empieza con el estudio de las funciones seccionalmente continuas y de orden exponencial, la Transformada de Laplace y sus propiedades, las funciones especiales, la transformada inversa y concluye con las aplicaciones en la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias y sistemas de ecuaciones diferenciales.

La lectura del presente trabajo, requiere de un adecuado conocimiento del Cálculo Diferencial e Integral y de las Series de Potencias.

Deseo expresar mi más profundo agradecimiento a mis colegas por sus sugerencias y apoyo en la realización de esta obra.

Agradezco por anticipado la acogida que ustedes brindan a esta pequeña obra.

Eduardo Espinoza Ramos.

INDICE

CAPITULO I

CAPITULO II

CAPITULO III

Pag.

CAPITULO IV

Pag.

CAPITULO I

1. CONCEPTOS BÁSICOS.

1.1 Introducción.-

En el cálculo elemental se estudió la derivación e integración los cuales gozan de la operación de linealidad, es decir:

$$\frac{d}{dx}\left[\alpha f(x)+\beta g(x)\right]=\alpha\frac{d}{dx}f(x)+\beta\frac{d}{dx}g(x)$$
$$\int[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx$$

donde α y β son constantes reales arbitrarias.

La integral definida de una suma también goza de la operación de linealidad, es decir:

$$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$$

La operación de linealidad de la derivación e integración transforman esencialmente una función en otra expresión por ejemplo:

$$\frac{d}{dx}x^3=3x^2 \quad , \quad \int x^3dx=\frac{x^4}{4}+c \quad , \quad \int_0^2 x^3dx=4\,.$$

nosotros estamos interesados en una integral impropia que transforma una función F(t) en otra función de parámetro s, al cual se le llamará Transformada de Laplace, es decir, que la transformada de Laplace es una operación que transforma una función F(t) en otra función de parámetro s.

1.2 Definición.- Sea F: $[0,\infty> \to R$, una función definida para $t \geq 0$, entonces a la función f definida por:

$$\boxed{f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-st} F(t)dt}$$

Se llama transformada de Laplace de F, siempre que el límite exista.
Simbólicamente a la transformada de Laplace de F se denota por: $L\{F(t)\}$, es decir:

$$\boxed{L\{F(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)dt = f(s)}$$

Ejemplo.- Calcular $L\{F(t)\}$, donde F(t) = t

<u>Solución</u>

$$L\{F(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} t\ dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-st} t\, dt = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right) \Big/_0^b$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[\left(-\frac{be^{-sb}}{s} - \frac{e^{-sb}}{s^2}\right) - \left(0 - \frac{1}{s^2}\right)\right] = 0 - 0 + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}$$

$$\therefore\ L\{t\} = \frac{1}{s^2}, \quad \text{para } s > 0.$$

Observación.- El uso del símbolo de $\lim_{b \to +\infty} F(t) \Big/_0^b$ vamos a reemplazar por la notación $F(x) \Big/_0^{+\infty}$, es decir:

$$\boxed{L\{t\} = \int_0^{+\infty} te^{-st} dt = \left(-\frac{t\, e^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right) \Big/_0^{+\infty} = \frac{1}{s^2},\quad s > 0}$$

Entendiéndose que en el límite superior, cuando $t \to +\infty$, $e^{-st} \to 0$, para $s > 0$.

1.3 Condiciones Suficientes para la Existencia de $L\{F(t)\}$.-

La integral impropia que define la Transformada de Laplace no necesariamente converge, por ejemplo; ni $L\{\frac{1}{t}\}$ ni $L\{e^{t^2}\}$ existen.

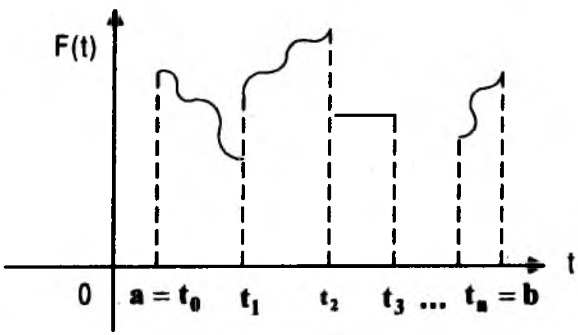
Las condiciones suficientes que garantizan la existencia de $L\{F(t)\}$ son que F(t) sea continua por tramos o seccionalmente continua para $t \geq 0$ y además que sea de orden exponencial para $t > T$.

1.4 Funciones Continuas por Tramos o Seccionalmente Continuas.

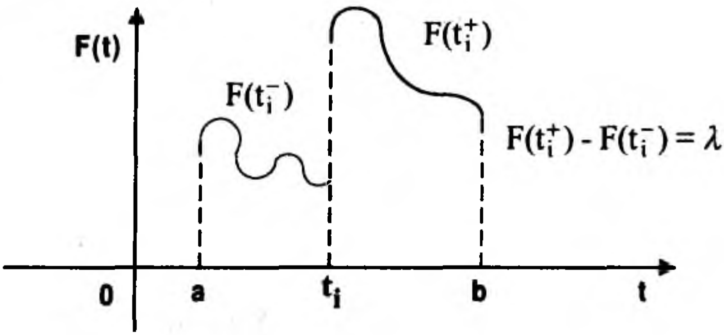
Definición.- La función F: [a,b] → R, es continua por tramos o seccionalmente continua en [a,b] si :

I. Existen puntos en [a,b] tal que: $a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n = b$, donde F es continua en cada subintervalo $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ para i = 0,1,2,..., n, salvo en dichos puntos.

II. En cada punto $t_i \in [a,b]$ existen los límites $F(t_i^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} F(t_i + h)$, $F(t_i^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} F(t_i - h)$.

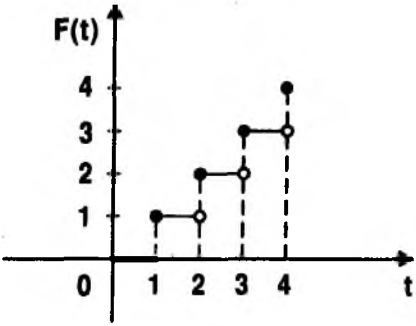


Observación.- Consideremos una función F: [a,b] → R seccionalmente continua.



A la diferencia $F(t_i^+) - F(t_i^-) = \lambda$ se llama magnitud del salto de la función en el punto t_i.

Ejemplo.- La función $F(t) = [|t|]$ es continua por tramos en [0,4].



Si $t \in [0,1> \Rightarrow F(t) = 0$

$t \in [1,2> \Rightarrow F(t) = 1$

$t \in [2,3> \Rightarrow F(t) = 2$

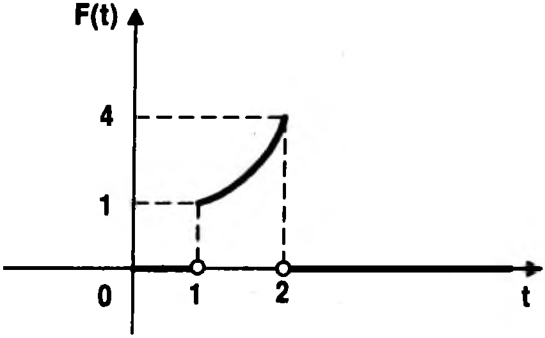
$t \in [3,4> \Rightarrow F(t) = 3$

para $t = 4 \Rightarrow F(t) = 4$

Ejemplo.-

La función $F(t) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 < t < 1 \\ t^2 & si \quad 1 < t < 2 \\ 0 & si \quad t > 2 \end{cases}$, ¿Es F continua por tramos?

Solución



$$F(1^-) = \lim_{h\to 0^-} F(1-h) = \lim_{h\to 0^-} 0 = 0 \quad ; \quad F(1^+) = \lim_{h\to 0^+} F(1+h) = \lim_{h\to 0^+} (1+h)^2 = 1$$

$$F(2^-) = \lim_{h\to 0^-} F(2-h) = \lim_{h\to 0^-} (2-h)^2 = 4 \quad ; \quad F(2^+) = \lim_{h\to 0^+} F(2+h) = \lim_{h\to 0^+} 0 = 0$$

además F(t) es continua $\forall$ t $\in$ <0,∞> salvo en t = 1,2. Luego F(t) es una función continua por tramos en <0,∞>.

Observación.- Toda función continua en [a,b] es continua por tramos en [a,b].

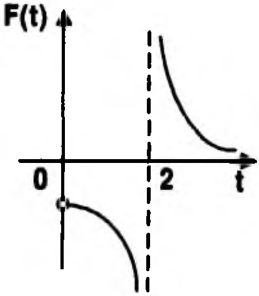
Ejemplo.- Determinar si la función $F(t) = \ln(t^2+1)$ es continua por tramos en [0,∞>.

Solución

La función $F(t) = \ln(t^2+1)$ es continua $\forall$ t $\in$ R, en particular es continua, $\forall$ t $\geq$ 0 entonces $F(t) = \ln(t^2+1)$, es continua por tramos en [0,+∞>.

Ejemplo.- Determinar si la función $F(t) = \dfrac{t+2}{t-2}$ es continua por tramos.

Solución



$$F(2^+) = \lim_{h\to 0^+} F(2+h) = \lim_{h\to 0^+} \frac{h+4}{h} = +\infty$$

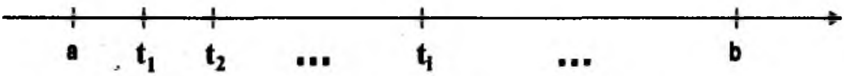
$$F(2^-) = \lim_{h\to 0^-} F(2-h) = \lim_{h\to 0^-} \frac{4-h}{-h} = -\infty$$

como $\nexists$ los límites, por lo tanto la función F(t) no es continua por tramos.

Observación.-

1. Si F es una función continua por tramos en [a,b], entonces dicha función es integrable en [a,b] es decir: $\exists \int_a^b F(t)\,dt$

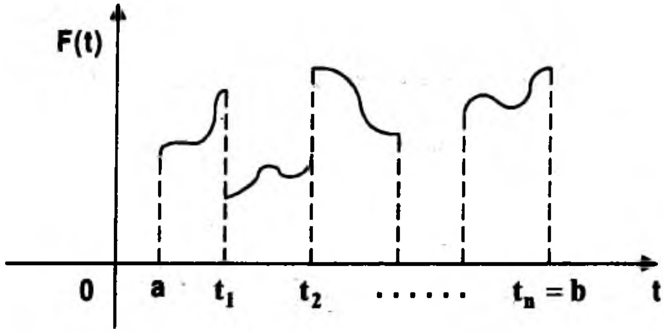
   En efecto: como F es continua por tramos en [a,b], con discontinuidad en $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ y posiblemente en a,b.



Entonces a la integral $\int_a^b F(t)\,dt$, se define como:

$$\int_a^b F(t)\,dt = \lim_{h\to 0}\left[\int_{a+h}^{t_0-h} F(t)\,dt + \int_{t_0+h}^{t_1-h} F(t)\,dt + \ldots + \int_{t_n+h}^{b-h} F(t)\,dt\right]$$

como este límite siempre existe, entonces $\exists \int_a^b F(t)\,dt$



2. Si F y G son dos funciones continuas por tramos en [a,b], entonces el producto también es continua por tramos en [a,b]. (Probar: queda como ejercicio).

1.5 Funciones de Orden Exponencial.-

Definición.- La función F: [0,+∞> → R, es de orden exponencial si existen constantes c > 0 y α tal que $|F(t)| \le c e^{\alpha t}$, ∀ t ≥ 0.

Ejemplo.- Toda función constante es de orden exponencial. En efecto:

Sea F una función constante ⇒ ∃ c > 0 tal que $|F(t)| \le c$, ∀ t ≥ 0 entonces $|F(t)| \le c e^{\alpha t}$.

Es decir que F es de orden exponencial haciendo α = 0.

Ejemplo.- Determinar si la función $F(t) = e^{at} \cos bt$, es de orden exponencial.

Solución

Como $|\cos bt| \le 1$, ∀ t ≥ 0 entonces $e^{at}|\cos bt| \le e^{at}$, ∀ t ≥ 0 de donde $|e^{at} \cos bt| \le e^{at} \Rightarrow |F(t)| \le e^{at}$.

Luego $F(t) = e^{at} \cos bt$ es de orden exponencial tomando c = 1 y α = a.

Propiedades.-

1. Si F: [0,+∞> → R es una función seccionalmente continua en [0,+∞>, entonces:

   i) La función F es de orden exponencial siempre que existe $\alpha \in R$ tal que $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{F(t)}{e^{\alpha t}} = 0$.

   ii) La función F no es de orden exponencial si: $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{F(t)}{e^{\alpha t}} = \infty$.

Ejemplo.- Determinar si la función $F(t) = t^n$ es de orden exponencial para $n \in Z^+$, $\forall$ t ≥ 0.

Solución

$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{F(t)}{e^{\alpha t}} = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{t^n}{e^{\alpha t}}$, aplicando la regla de L'Hospital

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{t^n}{e^{\alpha t}} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{\alpha^n}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^{\alpha t}} = \frac{n!}{\alpha^n}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^{\alpha t}} = \frac{n!}{\alpha^n}(0) = 0, \forall\alpha > 0$$

por lo tanto $F(t) = t^n$ es de orden exponencial $\forall t \geq 0$

Ejemplo.- Determinar si la función $F(t) = e^{t^2}$ es de orden exponencial.

Solución

$$\lim_{t\to\infty}\frac{F(t)}{e^{\alpha t}} = \lim_{t\to\infty}\frac{e^{t^2}}{e^{\alpha t}} = \lim_{t\to\infty} e^{t^2-\alpha t} = +\infty$$

Luego la función F(t) no es de orden exponencial.

2. Si $F, G: [0,\infty > \to R$, son dos funciones de orden exponencial, entonces el producto de F y G son de orden exponencial.

En efecto:

Como F y G son de orden exponencial $\Rightarrow$ existen $\alpha_1, \alpha_2, y\ c_1, c_2 > 0$, tal que:

$$|F(t)| \le c_1 e^{\alpha_1 t} \text{ y } |G(t)| \le c_2 e^{\alpha_2 t}, \forall\ t \ge 0$$

$$|F(t).G(t)| = |F(t)||G(t)| \le c_1 e^{\alpha_1 t}.c_2 e^{\alpha_2 t}$$

$= c_1.c_2 e^{(\alpha_1+\alpha_2)t}\ \forall t \ge 0$, entonces $|F(t).G(t)| \le e^{\alpha t}$, entonces F(t) . G(t) es de orden exponencial.

3. Si $F, G: [0,\infty> \to R$ son dos funciones de orden exponencial , entonces la suma de F y G es de orden exponencial.

(Queda como ejercicio para el lector).

Ejemplo.- Demostrar que la función $f(t) = t^n \operatorname{sen} kt$ es continua por tramos y de orden exponencial en $[0,+\infty>$.

Solución

Sea $f(t) = f_1(t).f_2(t) = t^n \operatorname{sen} kt$, donde $f_1(t) = t^n$, $f_2(t) = \operatorname{sen} kt$, la función $f_1(t) = t^n$ es continua $\forall\ t \in R$, en particular $f_1(t) = t^n$ es continua en $[0,+\infty>$ por lo tanto $f_1(t) = t^n$ es continua por tramos (por la propiedad que toda función continua en $[a,b]$ es continua por tramos en $[a,b]$).

La función $f_2(t) = \operatorname{sen} kt$, es continua $\forall\ t \in R$, en particular es continua en $[0,+\infty>$, por lo tanto $f_2(t) = \operatorname{sen} kt$ es continua por tramos.

Entonces como $f_1(t) = t^n$ y $f_2(t) = \operatorname{sen} kt$ son continuas por tramos entonces $f(t) = t^n \operatorname{sen} kt$ es continua por tramos ahora demostraremos que $f_1(t) = t^n$ es de orden exponencial; para esto demostraremos que:

$\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{f_1(t)}{e^{\alpha t}} = 0$, es decir: $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t^n}{e^{\alpha t}} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{n!}{\alpha^n e^{\alpha t}} = 0$, entonces $f_1(t) = t^n$ es de orden exponencial.

Ahora demostraremos que $f_2(t) = \text{sen}\, kt$ es de orden exponencial, para esto existen c y α, tal que $|f_2(t)| \le ce^{\alpha t}$, pero $|\text{sen}\, kt| \le 1$ de donde $|f_2(t)| \le 1 = 1e^{0t}$ tomando $c = 1$, $\alpha = 0$ se tiene que $f_2(t) = \text{sen}\, kt$ es de orden exponencial por lo tanto como $f_1(t) = t^n$ y $f_2(t) = \text{sen}\, kt$ son de orden exponencial, entonces: $f(t) = t^n.\text{sen}\, kt$ es de orden exponencial.

1.6 Teorema.- Si la función $F{:}[0,+\infty> \to R$, es seccionalmente continua y de orden exponencial α entonces $\exists\, f(s) = L\{F(t)\}, \forall\, s > \alpha$.

Demostración

Por hipótesis se tiene que F(t) es de orden exponencial $\alpha \Rightarrow \exists\, M > 0$, tal que $|F(t)| \le Me^{\alpha t}, \forall\, t \ge 0$. Además por propiedad $\left|\int_a^b F(t)dt\right| \le \int_a^b |F(t)|dt$ y

$$L\{F(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)dt = \lim_{a \to \infty} \int_0^a e^{-st} F(t)dt\ .$$

Luego $|e^{-st}F(t)| = e^{-st}|F(t)| \le M\, e^{-st}.e^{\alpha t}$, $\forall$ t ≥ 0 puesto que

$|F(t)| \le M\, e^{\alpha t}$, ∀ t ≥ 0

Es decir: $|e^{-st}F(t)| \le Me^{-(s-\alpha)t}$,∀ t ≥0, a esta desigualdad integramos de 0 hasta a.

$$\int_0^a |e^{-st}F(t)|dt \le \int_0^a M\, e^{-(s-\alpha)t}dt = -\frac{M}{s-\alpha} e^{-(s-\alpha)t} \Big/_0^a$$

$$\int_0^a |e^{-st}F(t)|dt \le -\frac{M}{s-\alpha}(e^{-(s-\alpha)a} - 1)$$

Ahora tomamos límite cuando a → +∞

$$\lim_{a \to +\infty} \int_0^a |e^{-st}F(t)|dt \le -\frac{M}{s-\alpha} \lim_{a \to +\infty} (e^{-(s-\alpha)a} - 1) = \frac{M}{s-\alpha}$$

$$\int_0^{+\infty} \left|e^{-st} F(t)dt\right| \le \frac{M}{s-\alpha}, \ s > \alpha$$

por lo tanto $\int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)dt$ es convergente, entonces existe $\int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)dt$ esto quiere decir que:

$$\exists\ L\{F(t)\} = f(s)$$

Observación.-

1) Si F: [0,∞> → R es una función continua por tramos y de orden exponencial, se llama función de clase A.

2) Si F: [0,+∞> → R es una función de clase A entonces ∃ L{F(t)}.

3) Si ∃ L{F(t)} $\not\Rightarrow$ que F sea una función de clase A.

1.7 Teorema.- Sea F(t) una función continua por partes para t ≥ 0 y de orden exponencial para t > T; entonces $\lim\limits_{s\to\infty} L\{F(t)\} = 0$

Demostración

Como F(t) es continua por partes en 0 ≤ t ≤ T, es necesariamente acotada en este intervalo.

$|F(t)| \le M_1 = M_1 e^{0t}$, además $|F(t)| \le M_2 e^{\lambda t}$

para t > T. Si M denota el máximo de $\{M_1, M_2\}$ y c, el máximo {0,λ} entonces

$$|L\{F(t)\}| \le \int_0^{\infty} e^{-st}|F(t)|dt \le M\int_0^{\infty} e^{-st}.e^{ct}dt \le -M\frac{e^{-(s-c)t}}{s-c}\Big/_0^{\infty} = \frac{M}{s-c} \text{ para } s > c$$

$|L\{F(t)\}| \le \dfrac{M}{s-c}$ para s > c, Cuando s → ∞ tenemos que:

$|L\{F(t)\}| \to 0$ y por lo tanto $\lim\limits_{s\to\infty} L\{F(t)\} = 0$

1.8 Transformada de Laplace de algunas Funciones Elementales.

Encontrar la Transformada de Laplace de las siguientes funciones.

1) $F(t) = e^{kt}$

Solución

Aplicando la definición de Transformada de Laplace

$$f(s) = L\{F(t)\} = L\{e^{kt}\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}.e^{kt}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-k)t}dt =$$

$$= -\frac{e^{-(s-k)t}}{s-k}\Big/_0^{\infty} = -\frac{1}{s-k}(0-1) = \frac{1}{s-k} \quad \text{para } s > k$$

por lo tanto $f(s) = L\{e^{kt}\} = \dfrac{1}{s-k}$ para s > k

Observación.- Cuando k = 0 se tiene:

$$f(s) = L\{1\} = \frac{1}{s} \text{ para } s > 0.$$

2) $F(t) = t^n$

Solución

$f(s) = L\{F(t)\} = L\{t^n\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}t^n dt$, integrando por partes se tiene:

$$\begin{cases} u = t^n \\ dv = e^{-st}dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = nt^{n-1}dt \\ v = -\dfrac{e^{-st}}{s} \end{cases}$$

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}t^n dt = -\frac{t^n e^{-st}}{s}\Big/_0^{+\infty} + \frac{n}{s}\int_0^{+\infty} e^{-st}t^{n-1}dt$$

para s > 0, n > 0, $t^n e^{-st} \to 0$, cuando t $\to +\infty$, luego se tiene:

$$f(s)=\frac{n}{s}\int_0^{+\infty} e^{-st}t^{n-1}dt=\frac{n}{s}L\{t^{n-1}\} \quad \textbf{... (α)}$$

siguiendo el mismo proceso se llega a que:

$L\{t^{n-(n-1)}\}=L\{t\}=\frac{1}{s}L\{t^0\}=\frac{1}{s^2}$, puesto que $L\{1\}=\frac{1}{s}$, que reemplazando en (α) se tiene: $f(s)=\frac{n}{s}.\frac{n-1}{s}...\frac{1}{s}.\frac{1}{s}=\frac{n!}{s^{n+1}}$

$$\therefore \quad f(s)=L\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}} \text{ , si } s>0$$

3) $F(t)=\operatorname{sen} at$

Solución

$f(s)=L\{\operatorname{sen} at\}=\int_0^{+\infty} e^{-st} \operatorname{sen} at\, dt$, integrando por partes.

$f(s)=e^{-st}\left(\frac{s.\operatorname{sen} at+a\cos at}{s^2+a^2}\right)\Big/_0^{+\infty}$, para $s>0$, $e^{-st}\to 0$, cuando $t\to+\infty$,

entonces: $f(s)=L\{\operatorname{sen} at\}=\frac{a}{s^2+a^2}$, si $s>0$

4) $F(t)=\cos at$

Solución

En forma similar que la función anterior.

$$f(s)=L\{\cos at\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}\cos at\, dt=\frac{s}{s^2+a^2}\text{, si } s>0$$

Es decir: $f(s)=L\{\cos at\}=\frac{a}{s^2+a^2}$, si $s>0$

Tabla de Transformada de Laplace de algunas Funciones Elementales.

F(t)	L{F(t)} = f(s)
k	$\frac{k}{s}$, s > 0
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, s > 0
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, s > a
sen at	$\frac{a}{s^2+a^2}$, s > 0
cos at	$\frac{s}{s^2+a^2}$, s > 0
senh at	$\frac{a}{s^2-a^2}$, s > |a|
cosh at	$\frac{s}{s^2-a^2}$, s > |a|
$e^{bt}\,\text{sen}\,at$	$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$
$e^{bt}\cos at$	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$
$e^{bt}\,\text{senh}\,at$	$\frac{a}{(s-b)^2-a^2}$
$e^{bt}\cosh at$	$\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$

Ejemplos.- Calcular L{F(t)} donde F(t) es dado:

1) $F(t)=t^4$

Solución

$$L\{F(t)\}=L\{t^4\}=\frac{4!}{s^5}=\frac{24}{s^5}$$

2) $F(t) = \text{sen}\, 20t$

Solución

$$L\{F(t)\} = L\{\text{sen}\, 20t\} = \frac{20}{s^2 + 400}$$

3) $F(t) = \cos^2 4t$

Solución

$$L\{F(t)\} = L\{\cos^2 4t\} = L\{\frac{1+\cos 8t}{2}\} = \frac{1}{2}(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 64})$$

4) $F(t) = \text{sen}\, \pi t \cos \pi t$

Solución

$$L\{F(t)\} = L\{\text{sen}\, \pi t . \cos \pi t\} = L\{\frac{\text{sen}\, 2\pi t}{2}\} = \frac{1}{2}(\frac{2\pi}{s^2 + 4\pi^2}) = \frac{\pi}{s^2 + 4\pi^2}$$

5) $F(t) = \text{sen}^2 \pi t$

Solución

$$L\{F(t)\} = L\{\text{sen}^2 \pi t\} = L\{\frac{1 - \cos 2\pi t}{2}\} = \frac{1}{2} L\{1 - \cos 2\pi t\} = \frac{1}{2}(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4\pi^2})$$

1.9 Propiedades de la Transformada de Laplace.-

a. Propiedad de Linealidad.-

Sean F,G: $[0,\infty> \to R$, funciones continuas por tramos y de orden exponencial entonces:

$$\boxed{L\{\alpha F(t) + \beta G(t)\} = \alpha L\{F(t)\} + \beta L\{G(t)\}}$$

Demostración

Mediante la definición de Transformada se tiene:

$$L\{\alpha F(t)+\beta G(t)\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}(\alpha F(t)+\beta G(t))dt$$

$$=\alpha\int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt+\beta\int_0^{+\infty} e^{-st}G(t)dt=\alpha L\{F(t)\}+\beta L\{G(t)\}$$

$$\therefore \quad L\{\alpha F(t)+\beta G(t)\}=\alpha L\{F(t)\}+\beta L\{G(t)\}$$

Ejemplo.- Calcular L{F(t)}, donde $F(t)=t^2+\cos 2t+e^{3t}$

Solución

$$L\{F(t)\}=L\{t^2+\cos 2t+e^{3t}\}=L\{t^2\}+L\{\cos 2t\}+L\{e^{3t}\}=\frac{2}{s^3}+\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{s-3}$$

b. Primera Propiedad de Traslación.-

Si F: [0,+∞> → R, es una función continua por tramos y de orden exponencial y si L{F(t)} = f(s) entonces para a ≠ 0 se tiene.

$$\boxed{L\{e^{at}F(t)\}=f(s-a)\ ,\quad s>a}$$

Demostración

Mediante la definición de Transformada se tiene:

$$L\{F(t)\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt=f(s) \quad \text{entonces}$$

$$L\{e^{at}F(t)\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}.e^{at}F(t)dt=\int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}F(t)dt=f(s-a)$$

$$\therefore \quad L\{e^{at}F(t)\}=f(s-a)$$

Ejemplo.- Si $F(t)=t^3e^{4t}$. Hallar L{F(t)}.

Solución

$$L\{t^3\}=\frac{3!}{s^4}=\frac{6}{s^4}=f(s)\text{, entonces: } L\{t^3e^{4t}\}=f(s-4)=\frac{6}{(s-4)^4}$$

$$\therefore\quad L\{t^3e^{4t}\}=\frac{6}{(s-4)^4}$$

Ejemplo.- Si $F(t)=e^{-t}\cos 2t$. Hallar L{F(t)}

Solución

Sea $L\{\cos 2t\}=\dfrac{s}{s^2+4}=f(s)$, entonces:

$$L\{e^{-t}\cos 2t\}=f(s+1)=\frac{s+1}{(s+1)^2+4}$$

$$\therefore\quad L\{e^{-t}\cos 2t\}=\frac{s+1}{s^2+2s+5}$$

c. Segunda Propiedad de Traslación.-

Si F: [0,+∞> → R, es una función continua por tramos y de orden exponencial y;

Si L{F(t)}= f(s) y $G(t)=\begin{cases} 0\ , & t<a \\ F(t-a); & t>a \end{cases}$ entonces $L\{G(t)\}=e^{-as}f(s)$

Demostración

Mediante la definición de transformada de Laplace

$$L\{G(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} G(t)dt = \int_0^{a} e^{-st} G(t)dt + \int_a^{\infty} e^{-st} G(t)dt$$

$$= 0 + \int_a^{+\infty} e^{-st} G(t)dt = \int_a^{+\infty} e^{-st} G(t)dt$$

Es decir: $Lz\{G(t)\} = \int_a^{+\infty} e^{-st} G(t)dt$

ahora calculamos la integral, haciendo la sustitución:

u = t – a $\Rightarrow$ t = u + a $\Rightarrow$ dt = du, reemplazando en la integral se tiene:

$$L\{G(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-s(u+a)} G(u+a)du = e^{-as} \int_0^{+\infty} e^{-su} F(u)du = e^{-as} f(s)$$

por lo tanto: $L\{G(t)\} = e^{-as} f(s)$.

Ejemplo.- Hallar L{F(t)} si $F(t) = \begin{cases} (t-2)^2 & , t > 2 \\ 0 & , t < 2 \end{cases}$

<u>Solución</u>

Sea $L\{t^3\} = \dfrac{6}{s^4} = f(s) \Rightarrow L\{F(t)\} = e^{-2s} f(s) = \dfrac{6e^{-2s}}{s^4}$

$$\therefore \quad L\{F(t)\} = \frac{6e^{-2s}}{s^4}$$

d. Propiedad del Cambio de Escala.

Sea F: [a,+∞> → R, una función continua por tramos y de orden exponencial.

Si $L\{F(t)\} = f(s) \Rightarrow L\{F(at)\} = \dfrac{1}{a} f(s/a)$

<u>Demostración</u>

Aplicando la definición de Transformada de Laplace.

$L\{F(at)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(at)dt$, calculando la integral se tiene:

sea $u = at \Rightarrow t = \dfrac{u}{a} \Rightarrow dt = \dfrac{du}{a}$

$$L\{F(at)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(at)dt = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-s/a} F(u)du = \frac{1}{a} f(\frac{s}{a})$$

$$\therefore \quad L\{F(at)\} = \frac{1}{a} f(\frac{s}{a})$$

Ejemplo.- Hallar L{sen 7t}

Solución

Sea $L\{\text{sen } 7t\} = \dfrac{1}{s^2+1} = f(s)$, entonces

$$L\{\text{sen } 7t\} = \frac{1}{7} f(\frac{s}{7}) = \frac{1}{7}(\frac{1}{\frac{s^2}{49}+1}) = \frac{7}{s^2+49}$$

$$\therefore \quad L\{\text{sen } 7t\} = \frac{7}{s^2+49}$$

1.10 Transformada de Laplace de la Multiplicación por Potencia de t^n.

Teorema.- Consideremos la función f: [0,+∞> → R, continua por tramos y de orden exponencial, si L{F(t)} = f(s), entonces

$$L\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L\{F(t)\}, \text{ para } s > 0. \ \forall\, n \in Z^+$$

Demostración

como $L\{F(t)\} = f(s) \Rightarrow f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)dt$

aplicando la regla de Leibnitz para la derivada bajo el signo de integración se tiene:

$$\frac{d}{ds} f(s) = f'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{d}{ds} e^{-st} F(t)dt$$

$$= -\int_0^{+\infty} t\, e^{-st} F(t)dt = -L\{t\, F(t)\}$$

Es decir que: $L\{t\, F(t)\} = -\frac{d}{ds} f(s)$, se cumple para n = 1

ahora generalizamos el teorema usando inducción matemática.

Suponiendo que el teorema es válido para n = h.

Es decir: $L\{t^h F(t)\} = (-1)^h \frac{d^h}{ds^h} f(s)$, lo que es lo mismo.

$\int_0^{\infty} e^{-st} t^h F(t)dt = (-1)^h \frac{d^h}{ds^h} f(s)$, derivando por la regla de leibnitz se tiene:

$$\frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} e^{-st} t^h F(t)dt = (-1)^h \frac{d^{h+1}}{ds^{h+1}} f(s)$$

Es decir: $\int_0^{+\infty} e^{-st} t^{h+1} F(t)dt = (-1)^{h+1} \frac{d^{h+1}}{ds^{h+1}} f(s)$

Luego como n = h el teorema es cierto, entonces el teorema es válido n = h + 1 y como también es válido para n = 1, entonces se cumple para todo $n \in Z^+$, por lo tanto.

$$L\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L\{F(t)\}$$

Ejemplos.-

1) Demostrar que $L\{t\cos at\}=\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$

Solución

$$L\{t\cos at\}=-\frac{d}{ds}L\{\cos at\}=-\frac{d}{ds}(\frac{s}{s^2+a^2})=-[\frac{(s^2+a^2)-s(2s)}{(s^2+a^2)^2}]=-\frac{a^2-s^2}{(s^2+a^2)^2}$$

$$\therefore\quad L\{t\cos at\}=\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

2) Hallar $L\{t(3\operatorname{sen}2t-2\cos 2t)\}$

Solución

$$L\{t(3\operatorname{sen}2t-2\cos 2t)\}=-\frac{d}{ds}L\{3\operatorname{sen}2t-2\cos 2t\}=-\frac{d}{ds}(\frac{6}{s^2+4}-\frac{2s}{s^2+4})$$

$$=\frac{d}{ds}(\frac{2s-6}{s^2+4})=\frac{2(s^2+4)-(2s-6)2s}{(s^2+4)^2}=\frac{2s^2+8-4s^2+12s}{(s^2+4)^2}=\frac{8+12s-2s^2}{(s^2+4)^2}$$

$$\therefore\quad L\{t(3\operatorname{sen}2t-2\cos 2t)\}=\frac{8+12s-2s^2}{(s^2+4)^2}$$

1.11 Transformada de Laplace de la División por "t".

Teorema.- Consideremos una función F: [0,∞> → R continua por tramos y de orden exponencial si L{F(t)} = f(s) entonces

$$L\{\frac{F(t)}{t}\}=\int_s^{+\infty}f(u)du$$

Demostración

Consideremos $G(t)=\dfrac{F(t)}{t}$ de donde F(t) = t G(t) aplicando la Transformada de Laplace a ambos lados L{F(t)} = L{t G(t)} y por el teorema (1.10) se tiene:

$L\{F(t)\} = -\frac{d}{ds}L\{G(t)\}$ de donde $\frac{d}{ds}L\{G(t)\} = -L\{F(t)\} = -f(s)$, y se tiene

L{G(t)} = – f(s) ds integrando se tiene: $L\{G(t)\} = -\int_{\infty}^{s} f(u)du = \int_{s}^{\infty} f(u)du$

Luego $L\{\frac{F(t)}{t}\} = \int_{s}^{\infty} f(u)du$

Observación.- La constante de integración se escoge de tal forma que $\lim\limits_{s\to\infty} g(s) = 0$

Ejemplo.-

1) Demostrar que: $L\{\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\} = \ln(\frac{s+b}{s+a})$

Solución

$$L\{e^{-at}-e^{-bt}\} = L\{e^{-at}\} - L\{e^{-bt}\} = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b} = f(s)$$

ahora aplicamos la Transformada de la división

$$L\{\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\} = \int_{s}^{+\infty} (\frac{1}{u+a} - \frac{1}{u+b})du = [\ln(u+a) - \ln(u+b)] \Big/_{s}^{\infty}$$

$$= \ln(\frac{u+a}{u+b}) \Big/_{s}^{\infty} = 0 - \ln(\frac{s+a}{s+b}) = \ln(\frac{s+b}{s+a})$$

$$\therefore \quad L\{\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\} = \ln(\frac{s+b}{s+a})$$

2) Calcular: $L\{\frac{\cos t - \cosh t}{t}\}$

Solución

$$L\{\cos t - \cosh t\} = L\{\cos t\} - L\{\cosh t\} = \frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2-1} = f(s)$$

ahora aplicamos la Transformada de la división

$$L\{\frac{\cos t - \cosh t}{t}\} = \int_s^{+\infty} (\frac{u}{u^2+1} - \frac{u}{u^2-1})du = [\frac{1}{2}\ln(u^2+1) - \frac{1}{2}\ln(u^2-1)] /_s^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(\frac{u^2+1}{u^2-1}) /_s^{\infty} = 0 - \frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+1}{s^2-1}) = \frac{1}{2}\ln(\frac{s^2-1}{s^2+1})$$

$$\therefore \quad L\{\frac{\cos t - \cosh t}{t}\} = \frac{1}{2}\ln(\frac{s^2-1}{s^2+1})$$

3) Hallar $L\{\frac{1-e^t + \operatorname{sen} 2t}{t}\}$

Solución

$$L\{1-e^t+\operatorname{sen} 2t\} = L\{1\} - L\{e^t\} + L\{\operatorname{sen} 2tsz = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{2}{s^2+4} = f(s)$$

ahora aplicamos la Transformada de la división

$$L\{\frac{1-e^t+\operatorname{sen} 2t}{t}\} = \int_s^{+\infty} (\frac{1}{u} - \frac{1}{u-1} + \frac{2}{u^2+4})du = [\ln u - \ln(u-1) + \operatorname{arctg}\frac{u}{2}] /_s^{\infty}$$

$$= [\ln(\frac{u}{u-1}) + \operatorname{arctg}\frac{u}{2}] /_s^{\infty} = (0 + \frac{\pi}{2}) - \ln\frac{s}{s-1} - \operatorname{arctg}\frac{s}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \ln\frac{s-1}{s} - \operatorname{arctg}\frac{s}{2}$$

$$\therefore \quad L\{\frac{1-e^t+\operatorname{sen} 2t}{t}\} = \frac{\pi}{2} + \ln\frac{s-1}{s} - \operatorname{arctg}\frac{s}{2}$$

$$= \ln(\frac{s-1}{s}) + \operatorname{arctg}(\frac{2}{s})$$

1.12 Transformada de Laplace de la Derivada.-

Los siguientes teoremas que se van ha estudiar, referentes a la Transformada de Laplace de la derivada se utilizan bastante en la resolución de las ecuaciones diferenciales.

a. Teorema.- Consideremos una función continua F: [0,∞> → R y que $F'(t)$ sea continua por tramos y de orden exponencial en [0,∞> entonces :

$$\boxed{L\{F'(t)\} = sL\{F(t)\} - F(0^+)\text{, donde } F(0^+) = \lim_{t\to 0^+} F(t)}$$

Demostración

Como $F'(t)$ es continua por tramos y de orden exponencial entonces por el teorema (1.6) existe $L\{F'(t)\}$, es decir:

$L\{F'(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} F'(t)dt$, integrando por partes.

$$\begin{cases} u = e^{-st} \\ dv = F'(t)dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -s\,e^{-st}\,dt \\ v = F(t) \end{cases}$$

$$L\{F'(t)\} = e^{-st} F(t) \Big/_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)dt = 0 - F(0^+) + sL\{F(t)\}$$

de donde: $\quad L\{F'(t)\} = s\,L\{F(t)\} - F(0^+)$

Ejemplo.- Aplíquese una Transformada de Laplace a la ecuación diferencial.

$\frac{dy}{dx} - 3y = e^{2t}$, sujeta a y(0) = 1.

Solución

Primeramente aplicamos la Transformada a ambos miembros de la ecuación diferencial

$$L\{\frac{dy}{dt}\} - 3L\{y\} = L\{e^{2t}\}$$

pero $L\{\frac{dy}{dt}\} = s\,L\{y\} - y(0)$ y $L\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}$, por lo tanto

$$s\,L\{y\} - y(0) - 3L\{y\} = \frac{1}{s-2}$$

$$(s-3)L\{y\} - 1 = \frac{1}{s-2} \quad \text{de donde} \quad L\{y\} = \frac{s-1}{(s-2)(s-3)}$$

b. Teorema.- Consideremos una función continua $F':[0,\infty> \to R$ y que $F''(t)$ sea una función continua por tramos y de orden exponencial.

Entonces: $$\boxed{L\{F''(t)\} = s^2 L\{F(t)\} - s\,F(0^+) - F'(0^+)}$$

Demostración

Como $F''(t)$ es continua por tramos y de orden exponencial entonces por el teorema (1.6) existe $L\{F''(t)\}$, es decir ahora aplicamos dos veces el teorema anterior (1.12 a.), para esto sea $G(t) = F'(t) \Rightarrow G'(t) = F''(t)$

$$L\{F''(t)\} = L\{G'(t)\} = s\,L\{G(t) - G(0^+)\}$$

$$L\{F''(t)\} = s\,L\{G(t)\} - F'(0^+) = s\,L\{F'(t)\} - F'(0^+)$$

$$= s(s\,L\{F(t)\} - F(0^+)) - F'(0^+) = s^2 L\{F(t)\} - s\,F(0^+) - F'(0^+)$$

$$\therefore \quad L\{F''(t)\} = s^2 L\{F(t)\} - s\,F(0^+) - F'(0^+)$$

Ejemplo.- Aplíquese una transformada a la ecuación diferencial $4y''(t) + y(t) = -2$ sujeta y(0) = 0, $y'(0) = \frac{1}{2}$.

Solución

Primeramente aplicamos la transformada a ambos miembros de la ecuación diferencial.

$$4L\{y''(t)\}+L\{y(t)\}=L\{-2\}$$

$$4s^2L\{y(t)\}-4sy(0)-4y'(0)+L\{y(t)\}=-\frac{2}{s}$$

$$(4s^2+1)L\{y(t)\}-0-2=-\frac{2}{s} \quad \text{de donde} \quad (4s^2+1)L\{y(t)\}=\frac{2s-2}{s}$$

$$\therefore \quad L\{y(t)\}=\frac{2(s-1)}{s(4s^2+1)}$$

Generalizando.- Si $F^{(n-1)}:[0,+\infty> \to R$, es una función continua y que $F^{(n)}(t)$ es una función continua por tramos y de orden exponencial. Entonces:

$$L\{F^{(n)}(t)\}=s^n L\{F(t)\}-s^{n-1}F(0^+)-s^{n-2}F'(0^+)-...-s\,F^{(n-2)}(0^+)-F^{(n-1)}(0^+)$$

$$L\{F^{(n)}(t)\}=s^n L\{F(t)\}-\sum_{i=0}^{n-1}s^{n-1-i}F^{(i)}(0^+)$$

Ejemplo.- Calcular $L\{t^n\}$ mediante la transformada de las derivadas.

Solución

$L\{D_t^n t^n\}=L\{n!\}=\frac{n!}{s}$, de donde se tiene:

$$\frac{n!}{s}=L\{D_t^n t^n\}=s^n L\{t^n\}-s^{n-1}F(0^+)-s^{n-2}F'(0^+)-...-F^{(n-1)}(0^+)$$

$\frac{n!}{s}=s^n L\{t^n\}-0-0-...-0$, por lo tanto: $L\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}$ para s > 0

1.13 Transformada de Laplace de Integrales.-

Teorema.- Consideremos una función F: [0,∞> → R, continua por tramos y de orden exponencial, entonces:

$$\boxed{\text{Si} \quad L\{F(t)\} = f(s) \Rightarrow L\{\int_a^t F(u)du\} = \frac{1}{s} L\{F(t)\} - \frac{1}{s}\int_0^a F(t)dt}$$

Demostración

Primero demostraremos que $\int_a^t F(u)du$ es de orden exponencial, es decir, como F es de orden exponencial $\Rightarrow \exists$ α, c > 0, tal que: $|F(t)| \le ce^{\alpha t}$, ∀ t ≥ 0

$$\left|\int_a^t F(u)du\right| \le \int_a^t |F(u)|du \le c\int_a^t e^{\alpha u}du = \frac{c}{\alpha}e^{\alpha u} \Big/_a^t = \frac{c}{\alpha}(e^{\alpha t} - e^{\alpha a}) \le \frac{c}{\alpha}e^{\alpha t}$$

entonces $\int_a^t F(u)du$ es de orden exponencial.

Por lo tanto $\exists \; L\{\int_a^t F(u)du\}$ es decir:

$$L\{\int_a^t F(u)du\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}(\int_a^t F(u)du)dt = \lim_{t_0 \to +\infty} \int_0^{t_0} e^{-st}(\int_a^t F(u)du)dt$$

integrando por partes.

$$\begin{cases} w = \int_a^t F(u)du \\ dv = e^{-st}dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dw = F(t)dt \\ v = \dfrac{e^{-st}}{-s} \end{cases}$$

$$L\{\int_a^t F(u)du\} = \lim_{t_0 \to +\infty} [-\frac{e^{-st}}{s}\int_a^t F(u)du \Big/_0^{t_0} + \frac{1}{s}\int_0^{t_0} e^{-st}F(t)dt]$$

$$= -\frac{1}{s}(0 - \int_a^0 F(u)du) + \lim_{t_0 \to +\infty} \frac{1}{s}\int_0^{t_0} e^{-st}F(t)dt$$

$$= \frac{1}{s}\int_a^0 F(u)du + \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt = \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt - \frac{1}{s}\int_0^a F(t)dt$$

$$\therefore \quad L\{\int_a^t F(u)du\} = \frac{1}{s}L\{F(t)\} - \frac{1}{s}\int_0^a F(t)dt$$

Observación.- Cuando a = 0 se tiene:

$$\boxed{L\{F(t)\} = f(s) \Rightarrow L\{\int_0^t F(u)du\} = \frac{f(s)}{s}}$$

Generalizando.-

$$L\{\int_0^t \int_a^t \dots \int_a^t F(u)du\dots du\} = \frac{1}{s^n}L\{F(t)\} - \frac{1}{s^n}\int_0^a F(u)du -$$

$$-\frac{1}{s^{n-1}}\int_0^a \int_a^t F(u)du\,du \dots \frac{1}{s}\underbrace{\int_0^a \int_a^t \int_a^t \dots \int_a^t F(u)du\dots du}_{n-1 \text{ veces}}$$

Cuando a = 0 se tiene:

$$L\{\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t F(u)du\dots du\} = \frac{1}{s^n}L\{F(t)\}$$

Ejemplos.-

1) Hallar $L\{\int_0^x t\,e^{at}\,\text{sen}\,t\,dt\}$

Solución

$$L\{\text{sen}\,t\} = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow L\{t\,\text{sen}\,t\} = -\frac{d}{ds}L\{\text{sen}\,t\} = -\frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2+1}) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$L\{t\,\text{sen}\,t\} = \frac{2s}{(s^2+1)^2} \Rightarrow L\{e^{at}t\,\text{sen}\,t\} = \frac{2(s-a)}{[(s-a)^2+1]^2} = f(s)$$

$$L\{\int_0^x t\,e^{at}\,\text{sen}\,t\,dt\} = \frac{f(s)}{s} = \frac{2(s-a)}{s[(s-a)^2+1)]^2}$$

$$\therefore \quad L\{\int_0^x t\,e^{at}\,\text{sen}\,t\,dt\} = \frac{2(s-a)}{s[(s-a)^2+1]^2}$$

2) Hallar $L\{t^2\int_1^x t\,\text{sen}\,t\,dt\}$

Solución

$$L\{\text{sen}\,t\} = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow L\{t\,\text{sen}\,t\} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$L\{\int_1^x t\,\text{sen}\,t\,dt\} = \frac{1}{s}L\{\text{sen}\,t\} - \frac{1}{s}\int_0^1 t\,\text{sen}\,t\,dt = \frac{1}{s}\left(\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right) - \frac{1}{s}(\cos 1 - \text{sen}\,1)$$

$$L\{\int_1^x t\,\text{sen}\,t\,dt\} = \frac{2}{(s^2+1)^2} - \frac{\cos 1 - \text{sen}\,1}{s}$$

$$L\{t^2\int_1^x t\,\text{sen}\,t\,dt\} = (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}L\{\int_1^x t\,\text{sen}\,t\,dt\} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{2}{(s^2+1)^2} - \frac{\cos 1 - \text{sen}\,1}{s}\right)$$

$$= \frac{d}{ds}\left[-\frac{8s}{(s^2+1)^3} + \frac{\cos 1 - \text{sen}\,1}{s^2}\right] = \frac{8(5s^2-1)}{(s^2+1)^4} - \frac{2(\cos 1 - \text{sen}\,1)}{s^3}$$

$$\therefore \quad L\{t^2\int_1^x t\,\text{sen}\,t\,dt\} = \frac{8(5s^2-1)}{(s^2+1)^4} - \frac{2(\cos 1 - \text{sen}\,1)}{s^3}$$

1.14 Aplicación de la Transformada de Laplace en la Evaluación de Integrales.-

Sea F: [0,+∞> → R; una función continua por tramos y de orden exponencial, entonces.

Si L{F(t)} = f(s) entonces $\int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt = f(s)$, tomando límite cuando s → 0, se tiene:

$$\lim_{s\to 0}\int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt = \lim_{s\to 0} f(s)$$

de donde $\int_0^{+\infty} F(t)dt = f(0)$ ... (*)

siempre que la integral sea convergente.

La expresión (*) es útil en la evaluación de integrales.

Ejemplo.-

1) Evalúe la integral $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}\operatorname{sen} bt}{t}dt$

<u>Solución</u>

Aplicando la división en t y luego la definición $L\{\operatorname{sen} bt\} = \frac{b}{s^2+b^2} = f(s)$

$$L\{\frac{\operatorname{sen} bt}{t}\} = \int_s^{+\infty} f(u)du = \int_s^{+\infty} \frac{b}{u^2+b^2}du = \operatorname{arctg}\frac{u}{b}\Big/_s^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{s}{b}$$

$L\{\frac{\operatorname{sen} bt}{t}\} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{s}{b}$, ahora aplicamos la definición de transformada

$\int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{\operatorname{sen} bt}{t}dt = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{s}{b}$, tomando límite cuando $s \to a$ se tiene:

$$\lim_{s\to a}\int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{\operatorname{sen} bt}{t}dt = \lim_{s\to a}(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{s}{b})$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-at}\frac{\operatorname{sen} bt}{t}dt = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{a}{b} = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

2) Demostrar que $\int_0^{+\infty} t\,e^{-3t}\operatorname{sen} t\,dt = \frac{3}{50}$

<u>Solución</u>

$$L\{\operatorname{sen} t\} = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow L\{t \operatorname{sen} t\} = -\frac{d}{ds} L\{\operatorname{sen} t\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$L\{t \operatorname{sen} t\} = \dfrac{2s}{(s^2+1)^2}$, ahora aplicamos la definición de transformada

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} t \operatorname{sen} t\, dt = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$, tomando límite cuando $s \to 3$ se tiene:

$$\lim_{s\to 3} \int_0^{+\infty} e^{-st} t \operatorname{sen} t\, dt = \lim_{s\to 3} \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-3t} t \operatorname{sen} t\, dt = \frac{6}{100} = \frac{3}{50}$$

3) Calcular la integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos 6t - \cos 4t}{t} dt$

Solución

Calculando la transformada de la función.

$$L\{\cos 6t - \cos 4t\} = \frac{s}{s^2+36} - \frac{s}{s^2+16} = f(s)$$

ahora aplicamos la transformada de la división

$$L\left\{\frac{\cos 6t - \cos 4t}{t}\right\} = \int_s^{\infty} \left(\frac{u}{u^2+36} - \frac{u}{u^2+16}\right) du$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln(u^2+36) - \frac{1}{2}\ln(u^2+16)\right] \Big/_s^{\infty} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u^2+36}{u^2+16}\right) \Big/_s^{\infty}$$

$$= 0 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2+36}{s^2+16}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2+16}{s^2+36}\right)$$

$L\{\frac{\cos 6t-\cos 4t}{t}\}=\frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+16}{s^2+36})$, aplicando la definición de transformada

$\int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{\cos 6t-\cos 4t}{t}dt=\frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+16}{s^2+36})$, tomando límite cuando $s\to 0$, se tiene:

$$\lim_{s\to 0}\int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{\cos 6t-\cos 4t}{t}dt=\frac{1}{2}\lim_{s\to 0}\ln(\frac{s^2+16}{s^2+36})=\frac{1}{2}\ln(\frac{0+16}{0+36})=\frac{1}{2}\ln(\frac{4}{6})^2=\ln\frac{2}{3}$$

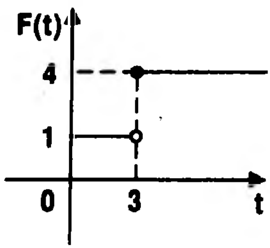
$$\therefore \quad \int_0^{+\infty}\frac{\cos 6t-\cos 4t}{t}dt=\ln(\frac{2}{3})$$

1.15 Ejercicios Desarrollados.-

1. Determinar cual de las siguientes funciones son continuas por parte.

a) $f(t)=\begin{cases}2\ , & 0\le t<3\\ 4\ , & t\ge 3\end{cases}$

Solución



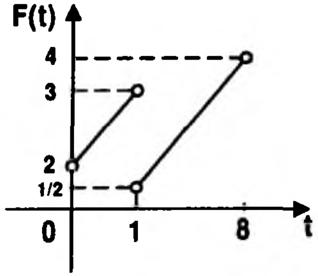
como $\lim_{t\to 3^-} f(t)=2$

$\lim_{t\to 3^+} f(t)=4$

La función es continua por tramos.

b) $f(t)=\begin{cases}t+2\ , & 0<t<1\\ \frac{t}{2}\ , & 1<t<8\end{cases}$

Solución



como $\lim\limits_{t\to 1^-} f(t) = 3$

$\lim\limits_{t\to 1^+} f(t) = \dfrac{1}{2}$

la función es continua por tramos .

c) $f(t) = e^{t^2}$

Solución

$\forall$ t $\in$ R, $f(t) = e^{t^2}$ es continua, en particular $f(t) = e^{t^2}$ es continua en [0,∞>, como toda función continua en un intervalo, dicha función es continua por tramos.

2) Determinar cual de las siguientes funciones son de orden exponencial.

a) f(t) = sen 5t

Solución

Como $-1 \leq \text{sen}\, 5t \leq 1 \quad \forall\, t \in R$ entonces

$|\text{sen}\, 5t| \leq 1 \Rightarrow |f(t)| \leq 1.e^{0t}$ (donde c = 1, α = 0)

por lo tanto la función f(t) = sen 5t es de orden exponencial.

b) $f(t) = t^5$

Solución

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{e^{\alpha t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^5}{e^{\alpha t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{5!}{\alpha^5 e^{\alpha t}} = 0 \quad \forall\, \alpha > 0$$

Luego la función $f(t) = t^5$ es de orden exponencial.

c) f(t) = sen h t

Solución

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\text{senh}\, t}{e^{\alpha t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{t} - e^{-t}}{2e^{\alpha t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{2t} - 1}{2\, e^{(\alpha+1)t}}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{2e^{2t}}{2(\alpha+1)e^{(\alpha+1)t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{(\alpha-1)t}(\alpha+1)} = 0 \quad \text{para } \alpha \geq 1$$

por lo tanto f(t) = sen h t es de orden exponencial

3) Hallar $L\{\cos^2 \alpha t\}$

Solución

Como $\cos^2 \alpha t = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha t)$ entonces

$$L\{\cos^2 \alpha t\} = \frac{1}{2} L\{1+\cos 2\alpha t\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 4\alpha^2}\right)$$

$$\therefore \quad L\{\cos^2 \alpha t\} = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2 + 4\alpha^2} + \frac{1}{s}\right) = \frac{s^2 + 2\alpha^2}{s(s^2 + 4\alpha^2)}$$

4) Demostrar que $L\{t \cosh at\} = \dfrac{s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^2}$

Solución

Aplicando la transformada de la multiplicación por t.

$$L\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2} \Rightarrow L\{t\cosh at\} = -\frac{d}{ds} L\{\cosh at\}$$

$$L\{t\cosh at\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2 - a^2}\right) = -\frac{s^2 - a^2 - s(2s)}{(s^2 - a^2)^2} = \frac{s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^2}$$

$$\therefore \quad L\{t\cosh at\} = \frac{s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^2}$$

5) Hallar $L\{\frac{\operatorname{senh} t}{t}\}$

Solución

$$L\{\operatorname{senh} t\} = L\{\frac{e^t - e^{-t}}{2}\} = \frac{1}{2}L\{e^t - e^{-t}\} = \frac{1}{2}(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}) = f(s)$$

Ahora aplicamos la transformada de la división.

$$L\{\frac{\operatorname{senh} t}{t}\} = \int_s^{+\infty} \frac{1}{2}(\frac{1}{\mu-1} - \frac{1}{\mu+1})d\mu = \frac{1}{2}[\ln(\mu-1) - \ln(\mu+1)] \Big/_s^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(\frac{\mu-1}{\mu+1}) \Big/_s^{\infty} = 0 - \frac{1}{2}\ln(\frac{s-1}{s+1})$$

$$\therefore \quad L\{\frac{\operatorname{senh} t}{t}\} = \frac{1}{2}\ln(\frac{s+1}{s-1})$$

6) Calcular $L\{t^n \cos at\}$

Solución

Se conoce que, $\cos t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!}$, entonces

$$\cos at = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (at)^{2k}}{(2k)!} \Rightarrow t^n \cos at = t^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (at)^{2k}}{(2k)!}$$

$t^n \cos at = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot a^{2k} t^{2k+n}}{(2k)!}$, tomando Transformada de Laplace se tiene:

$$L\{t^n \cos at\} = L\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k} t^{2k+n}}{(2k)!}\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k}}{(2k)!} L\{t^{2k+n}\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k}}{(2k)!} \frac{(2k+n)!}{s^{2k+n+1}}$$

$$\therefore \quad L\{t^n \cos at\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k}}{(2k)!} \frac{(2k+n)!}{s^{2k+n+1}}$$

7) Demostrar que $L\{\frac{\text{sen}^2 t}{t}\} = \frac{1}{4}\ln(\frac{s^2+4}{s^2})$

Solución

$$L\{\text{sen}^2 t\} = \frac{1}{2} L\{1-\cos 2t\} = \frac{1}{2}(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}) = f(s)$$

Ahora aplicamos la transformada de la división.

$$L\{\frac{\text{sen}^2 t}{t}\} = \int_s^{+\infty} \frac{1}{2}(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+4})du = \frac{1}{2}[\ln u - \frac{1}{2}\ln(u^2+4)] \Big/_s^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{4}\ln(\frac{u^2}{u^2+4}) \Big/_s^{\infty} = 0 - \frac{1}{4}\ln(\frac{s^2}{s^2+4}) = \frac{1}{4}\ln(\frac{s^2+4}{s^2})$$

$$\therefore \quad L\{\frac{\text{sen}^2 t}{t}\} = \frac{1}{4}\ln(\frac{s^2+4}{s^2})$$

8) Calcular $L\{\frac{e^t - \cos t}{t}\}$

Solución

$$L\{e^t - \cos t\} = L\{e^t\} - L\{\cos t\} = \frac{1}{s-1} - \frac{s}{s^2+1} = f(s)$$

mediante la transformada de la división se tiene:

$$L\{\frac{e^t - \cos t}{t}\} = \int_s^{+\infty} (\frac{1}{u-1} - \frac{u}{u^2+1})du = [\ln(u-1) - \frac{1}{2}\ln(u^2+1)] \Big/_s^{+\infty}$$

$$= \ln \frac{u-1}{\sqrt{u^2+1}} \Big/_s^{\infty} = 0 - \ln(\frac{s-1}{\sqrt{s^2+1}}) = \ln(\frac{\sqrt{s^2+1}}{s-1})$$

$$\therefore \quad L\{\frac{e^t - \cos t}{t}\} = \ln(\frac{\sqrt{s^2+1}}{s-1})$$

9) Demostrar que: $L\{e^{-ax}\int_0^t e^{ax}F(x)dx\} = \frac{f(s)}{s+a}$

Solución

Sea $L\{F(x)\} = f(s)$ aplicando la propiedad de traslación se tiene:

$L\{e^{ax}F(x)\} = f(s-a)$, aplicando la transformada de la integral se tiene:

$L\{\int_0^t e^{ax}F(x)dx\} = \frac{f(s-a)}{s}$, ahora aplicamos la propiedad de traslación, se tiene:

$$L\{e^{-ax}\int_0^t e^{ax}F(x)dx\} = \frac{f(s)}{s+a}$$

10) Demostrar que: $L\{\frac{\cos at - \cos bt}{t}\} = \frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+b^2}{s^2+a^2})$

Solución

$$L\{\cos at - \cos bt\} = \frac{s}{s^2+a^2} - \frac{s}{s^2+b^2} = f(s)$$

Ahora aplicamos la transformada de la división

$$L\{\frac{\cos at - \cos bt}{t}\} = \int_s^{\infty} (\frac{u}{u^2+a} - \frac{u}{u^2+b^2})du$$

$$= [\frac{1}{2}\ln(u^2+a^2) - \frac{1}{2}\ln(u^2+b^2)] \Big/_s^{\infty} = \frac{1}{2}\ln(\frac{u^2+a^2}{u^2+b^2}) \Big/_s^{\infty}$$

$$= 0 - \frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2}) = \frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+b^2}{s^2+a^2})$$

$$\therefore \quad L\{\frac{\cos at - \cos bt}{t}\} = \frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+b^2}{s^2+a^2})$$

11) Hallar $L\{\int_0^t t\,e^{2t}\,\text{sen}\,t\,dt\}$

<u>Solución</u>

$L\{\text{sen}\,t\} = \dfrac{1}{s^2+1}$, aplicando la transformada de la multiplicación por t.

$$L\{t\,\text{sen}\,t\} = -\frac{d}{ds}L\{\text{sen}\,t\} = -\frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2+1}) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

ahora aplicamos la propiedad de traslación.

$L\{e^{2t}t\,\text{sen}\,t\} = \dfrac{2(s-2)}{[(s-2)^2+1]^2}$, aplicando la transformada de la integral

$$L\{\int_0^t e^{2t}t\,\text{sen}\,t\,dt\} = \frac{2(s-2)}{s[(s-2)^2+1]^2}$$

12) Calcular $L\{t\,e^{2t}f'(t)\}$

<u>Solución</u>

Sea $L\{f(t)\} = \psi(s) \Rightarrow L\{f'(t)\} = s\psi(s) - f(0)$

aplicando la propiedad de traslación

$$L\{e^{2t}f'(t)\} = (s-2)\psi(s-2) - f(0)$$

ahora aplicamos la transformada de la multiplicación por t.

$$L\{t\,e^{2t}f'(t)\} = -\frac{d}{ds}L\{e^{2t}f'(t)\} = -\frac{d}{ds}((s-2)\psi(s-2) - f(0))$$

$$= -\psi(s-2) - (s-2)\psi'(s-2)$$

13) Calcular $L\{\frac{e^t(\cos t-1)}{t}\}$

Solución

$$L\{e^t(\cos t-1)\} = L\{e^t\cos t\} - L\{e^t\} = \frac{s-1}{(s-1)^2+1} - \frac{1}{s-1} = f(s)$$

aplicando la transformada de la división

$$L\{\frac{e^t(\cos t-1)}{t}\} = \int_s^{+\infty} (\frac{u-1}{(u-1)^2+1} - \frac{1}{u-1})du = (\frac{1}{2}\ln[(u-1)^2+1] - \ln(u-1)) \Big/_s^{\infty}$$

$$= \ln\frac{\sqrt{(u-1)^2+1}}{u-1} \Big/_s^{\infty} = 0 - \ln\frac{\sqrt{(s-1)^2+1}}{s-1} = \ln(\frac{s-1}{\sqrt{(s-1)^2+1}})$$

$$\therefore \quad L\{\frac{e^t(\cos t-1)}{t}\} = \ln(\frac{s-1}{\sqrt{(s-1)^2+1}})$$

14) Hallar la Transformada de Laplace de la función $F(t) = t^2\int_1^t x\,\text{sen}\,x\,dx + \int_0^t x\,e^{2x}\,\text{sen}\,x\,dx$

Solución

$$L\{F(t)\} = L\{t^2\int_1^t x\,\text{sen}\,x\,dx + \int_0^t x\,e^{2x}\,\text{sen}\,x\,dx\}$$

$$= L\{t^2\int_1^t x\,\text{sen}\,x\,dx\} + L\{\int_0^t x\,e^{2x}\,\text{sen}\,x\,dx\} \quad \ldots \textbf{(1)}$$

Calculando $L\{t^2\int_1^t x\,\text{sen}\,x\,dx\}$ se tiene:

$$\int_1^t x\,\text{sen}\,x\,dx = (-x\cos x + \text{sen}\,x)\Big/_1^t = \text{sen}\,t - t\cos t - \text{sen}\,1 + \cos 1$$

$$L\{t^2\int_1^t x\,\text{sen}\,x\,dx\} = L\{t^2(\text{sen}\,t - t\cos t - \text{sen}\,1 + \cos 1)\}$$

$$= (-1)^2 \frac{d^2}{ds} L\{\operatorname{sen} t - t\cos t - \operatorname{sen} 1 + \cos 1\}$$

$$= \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s^2+1} + \frac{1-s^2}{(1+s^2)^2} + \frac{\cos 1 - \operatorname{sen} 1}{s}\right)$$

$$= \frac{d}{ds}\left(\frac{-2s}{(s^2+1)^2} + \frac{2s^3-6s}{(s^2+1)^3} - \frac{\cos 1 - \operatorname{sen} 1}{s^2}\right)$$

$$= \frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3} + \frac{36s^2-6s^4-6}{(s^2+1)^4} + \frac{2(\cos 1 - \operatorname{sen} 1)}{s^3}$$

$$L\{t^2 \int_1^t x \operatorname{sen} x\, dx\} = \frac{8(5s^2-1)}{(s^2+1)^4} + \frac{2(\cos 1 - \operatorname{sen} 1)}{s^3} \qquad \ldots \text{ (2)}$$

ahora calculamos la transformada de $L\{\int_1^t x\, e^{2x} \operatorname{sen} x\, dx\}$

$$L\{\operatorname{sen} x\} = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow L\{x \operatorname{sen} x\} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

aplicando la propiedad de Traslación se tiene:

$L\{e^{2x} x \operatorname{sen} x\} = \dfrac{2(s-2)}{[(s-2)^2+1]^2}$, aplicando la transformada de la integral

$$L\{\int_0^t x\, e^{2x} \operatorname{sen} x\, dx\} = \frac{1}{s} L\{x\, e^{2x} \operatorname{sen} x\} = \frac{2(s-2)}{s[(s-2)^2+1]^2}$$

$$L\{\int_0^t x\, e^{2x} \operatorname{sen} x\, dx\} = \frac{2(s-2)}{s[(s-2)^2+1)]^2} \qquad \ldots \text{ (3)}$$

reemplazando (2) y (3) en (1) se tiene:

$$L\{F(t)\} = L\{t^2 \int_1^t x \operatorname{sen} x\, dx\} + L\{\int_0^t x\, e^{2x} \operatorname{sen} x\, dx\}$$

$$= \frac{8(5s^2-1)}{(s^2+1)^4} + \frac{2(\cos 1 - \operatorname{sen} 1)}{s^3} + \frac{2(s-2)}{s[(s-2)^2+1]^2}$$

15) Calcular $L\{\frac{1}{(1-e^{-t})^2}\}$

Solución

Se conoce que $\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, si $|x| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + n\,x^{n-1} + \ldots, \text{ si } |x| < 1$$

Luego $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^3 + \ldots + n\,x^{n-1} + \ldots$ para $x = -e^{-t}$, se tiene

$$\frac{1}{(1+e^{-t})^2} = 1 - 2e^{-t} + 3e^{-2t} - 4e^{-3t} + \ldots$$

$$L\{\frac{1}{(1+e^{-t})^2}\} = L\{1 - 2e^{-t} + 3e^{-2t} - 4e^{-3t} + \ldots\}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{3}{s+2} - \frac{4}{s+3} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{s+n}$$

$$\therefore \; L\{\frac{1}{(1+e^{-t})^2}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{s+n}$$

16) Hallar $L\{\int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u} du\}$

Solución

Expresando sen u en serie de potencia se tiene:

$$\operatorname{sen} u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \ldots$$

$$\frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1 - \frac{u^2}{3!} + \frac{u^4}{5!} - \frac{u^6}{7!} + \ldots$$

$$\int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u} du = \int_0^t (1 - \frac{u^2}{3!} + \frac{u^4}{5!} - \frac{u^6}{7!} + \ldots) du = (u - \frac{u^3}{3.3!} + \frac{u^5}{5.5!} - \frac{u^7}{7.7!} + \ldots) \Big/_0^t$$

$$= t - \frac{t^3}{3.3!} + \frac{t^5}{5.5!} - \frac{t^7}{7.7!} + \ldots$$

$$L\{\int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u} du\} = L\{t - \frac{t^3}{3.3!} + \frac{t^5}{5.5!} - \frac{t^7}{7.7!} + \ldots\} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{3s^4} + \frac{1}{5s^6} - \frac{1}{7s^8} + \ldots$$

$$= \frac{1}{s}(\frac{1/s}{1} - \frac{(1/s)^3}{3} + \frac{(1/s)^5}{5} - \frac{(1/s)^7}{7} + \ldots) = \frac{1}{s}\operatorname{arctg}(\frac{1}{s})$$

$$\therefore \quad L\{\int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u} du\} = \frac{1}{s}\operatorname{arctg}\frac{1}{s}$$

17) Probar que: $L\{\int_t^{3t} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx\} = \frac{1}{s}\operatorname{arctg}(\frac{2s}{s^2+3})$

<u>Solución</u>

Primeramente aplicamos propiedad de la integral

$$L\{\int_t^{3t} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx\} = L\{\int_0^{3t} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx - \int_0^t \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx\}$$, por la propiedad de linealidad

$$L\{\int_t^{3t} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx\} = L\{\int_0^{3t} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx\} - L\{\int_0^t \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx\} \qquad \ldots (1)$$

mediante el ejercicio (16) se tiene: $L\{\int_0^t \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx\} = \frac{1}{s}\operatorname{arctg}(\frac{1}{s}) \qquad \ldots (2)$

ahora aplicamos la propiedad de cambio de escala.

Si L{F(t)} = f(s) entonces $L\{F(at)\} = \frac{1}{a} f(\frac{s}{a})$, es decir:

Si $L\{\int_0^t \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx\} = \frac{1}{s} \operatorname{arctg} \frac{1}{s} \Rightarrow L\{\int_0^{3t} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx\} = \frac{1}{s} \operatorname{arctg}(\frac{3}{s})$ ... (3)

Luego reemplazamos (2) y (3) en (1).

$$L\{\int_t^{3t} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx\} = \frac{1}{s} \operatorname{arctg} \frac{3}{s} - \frac{1}{s} \operatorname{arctg} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} (\operatorname{arctg} \frac{3}{s} - \operatorname{arctg} \frac{1}{s})$$

$$= \frac{1}{s} \operatorname{arctg}(\frac{\frac{3}{s} - \frac{1}{s}}{1 + \frac{3}{s} \cdot \frac{1}{s}}) = \frac{1}{s} \operatorname{arctg}(\frac{2s}{s^2 + 3})$$

$$\therefore \quad L\{\int_t^{3t} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx\} = \frac{1}{s} \operatorname{arctg}(\frac{2s}{s^2 + 3})$$

18) Calcular $L\{\int_0^t \frac{x^2 \cos x + e^{-x} \operatorname{sen} x}{x} dx\}$

<u>**Solución**</u>

$$L\{\int_0^t \frac{x^2 \cos x + e^{-x} \operatorname{sen} x}{x} dx\} = L\{\int_0^t (x \cos x + \frac{e^{-x} \operatorname{sen} x}{x}) dx\}$$

aplicando la propiedad de la integral se tiene:

$$L\{\int_0^t \frac{x^2 \cos x + e^{-x} \operatorname{sen} x}{x} dx\} = L\{\int_0^t x \cos x \, dx\} + L\{\int_0^t \frac{e^{-x} \operatorname{sen} x}{x} dx\}$$

aplicando la transformada de la integral

$$L\{\int_0^t \frac{x^2\cos x + e^{-x}\operatorname{sen} x}{x}dx\} = \frac{1}{s}L\{x\cos x\} + \frac{1}{s}L\{\frac{e^{-x}\operatorname{sen} x}{x}\} \quad \ldots \textbf{(1)}$$

aplicando la transformada de la multiplicación y la división.

$$L\{x\cos x\} = -\frac{d}{dx}L\{\cos x\} = -\frac{d}{ds}(\frac{s}{s^2+1}) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} \quad \ldots \textbf{(2)}$$

$$L\{e^{-x}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\} = \int_s^\infty L\{e^{-x}\operatorname{sen} x\} = \int_s^\infty \frac{du}{(u+1)^2+1} = \operatorname{arctg}(u+1)\Big/_s^\infty$$

$$= \operatorname{arctg}(\infty) - \operatorname{arctg}(s+1) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(s+1) \quad \ldots \textbf{(3)}$$

ahora reemplazando (2) y (3) en (1):

$$L\{\int_0^t \frac{x^2\cos x + e^{-x}\operatorname{sen} x}{x}dx\} = \frac{1}{s}(\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}) + \frac{\pi}{2s} - \frac{1}{s}\operatorname{arctg}(s+1)$$

19) Dado una función G(t) donde $L\{G(t)\} = g(s)$, cuando $s > \alpha$. Entonces demostrar que para una constante $T > 0$.

$$L\{G(t+T)\} = e^{st}(g(s) - \int_0^T e^{-st}G(t)dt)dt\ ,\ s > \alpha,\ T > 0.$$

<u>Solución</u>

$L\{G(t+T)\} = \int_0^\infty e^{-st}G(t+T)dt$ por definición de transformada.

Sea $u = t + T$, para $t \to 0$, entonces $\mu \to T$

$t \to \infty$, entonces $\mu \to \infty$

$$L\{G(t+T)\} = \int_0^\infty e^{-st}G(t+T)dt = \int_0^\infty e^{-s(\mu-T)}G(\mu)d\mu$$

$$= e^{st}\int_T^\infty e^{-su}G(u)du = e^{st}[\int_0^\infty e^{-su}G(u)du - \int_0^T e^{-s\mu}G(u)du]$$

$$= e^{st}[\int_0^{\infty} e^{-st}G(t)dt - \int_0^{T} e^{-st}G(t)dt] = e^{st}[g(s) - \int_0^{T} e^{-st}G(t)dt]$$

$$\therefore \quad L\{G(t+T)\} = e^{st}[g(s) - \int_0^{T} e^{-st}G(t)dt]$$

20) Demostrar que $L\{\int_0^{T} \frac{1-e^{-u}}{u} du\} = \frac{1}{s}\ln(1+\frac{1}{s})$

Demostración

Primeramente aplicaremos la transformada de la división.

Si $L\{1-e^{-u}\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = f(s)$, entonces

$$L\{\frac{1-e^{-u}}{u}\} = \int_s^{\infty} (\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1})du = \ln(\frac{u}{u+1}) \Big/_s^{\infty} = 0 - \ln\frac{s}{s+1} = \ln(\frac{s+1}{s}) = \ln(1+\frac{1}{s})$$

ahora aplicamos la transformada de la integral.

Si $L\{\frac{1-e^{-u}}{u}\} = \ln(1+\frac{1}{s}) \Rightarrow L\{\int_0^{t} \frac{1-e^{-u}}{u} du\} = \frac{1}{s}\ln(1+\frac{1}{s})$

21) Calcular $L\{t\, e^{t} \int_0^{t} t \frac{d}{dt}(e^{2t} \operatorname{sen} t)dt\}$

Solución

Sea $F(t) = \frac{d}{dt}(e^{2t} \operatorname{sen} t) \Rightarrow L\{F(t)\} = L\{\frac{d}{dt}(e^{2t} \operatorname{sen} t)\} = s\, L\{e^{2t} \operatorname{sen} t\} - F(0)$

$$L\{F(t)\} = \frac{s}{(s-2)^2+1} - F(0) \Rightarrow L\{t\, F(t)\} = -\frac{d}{dt} L\{F(t)\}$$

$$L\{t\, F(t)\} = -\frac{d}{ds}[\frac{s}{(s-2)^2+1} - F(0)] = -\frac{5-s^2}{((s-2)^2+1)^2}$$

$$L\{t\,F(t)\}=\frac{s^2-5}{[(s-2)^2+1]^2} \Rightarrow L\{\int_0^t t\,F(t)dt\}=\frac{1}{s}(\frac{s^2-5}{[(s-2)^2+1]^2})$$

$$L\{t\,F(t)\}=\frac{s^2-5}{[(s-2)^2+1]^2} \Rightarrow L\{\int_a^t t\,F(t)dt\}=\frac{1}{s}L\{t\,F(t)\}-\frac{1}{s}\int_0^a t\,F(t)dt$$

$$L\{\int_a^t t\,F(t)dt\}=\frac{1}{s}(\frac{s^2-5}{[(s-2)^2+1]^2})-\frac{1}{s}\int_0^a t\frac{d}{dt}(e^{2t}\operatorname{sen}t)dt\}$$

$$=\frac{1}{s}(\frac{s^2-5}{[(s-2)^2+1]^2})-\frac{1}{s}\int_a^t(2t\,e^{2t}\operatorname{sen}t+t\,e^{2t}\cos t)dt \qquad \ldots (1)$$

$$\int_0^a 2t\,e^{2t}\operatorname{sen}t\,dt=e^{2a}[\frac{4a}{5}\operatorname{sen}a-\frac{6\operatorname{sen}a}{25}-\frac{2a}{5}\cos a+\frac{8\cos a}{25}]-\frac{8}{25} \qquad \ldots (2)$$

$$\int_0^a t\,e^{2t}\cos dt=e^{2a}[\frac{2a\cos a}{5}-\frac{3\operatorname{sen}a}{25}+\frac{a\operatorname{sen}a}{5}-\frac{4\operatorname{sen}a}{25}]+\frac{3}{25} \qquad \ldots (3)$$

sustituyendo (2), (3) en (1).

$$L\{\int_a^t t\,F(t)dt\}=\frac{1}{s}(\frac{s^2-5}{[(s-2)^2+1]^2})-\frac{e^{2a}}{s}(a\operatorname{sen}a-\frac{2}{5}\operatorname{sen}a+\frac{\cos a}{5})+\frac{1}{5s}$$

$$L\{e^t\int_a^t t\,F(t)dt\}=\frac{(s-1)^2-5}{(s-1)[(s-3)^2+1]^2}-\frac{e^{2a}}{s-1}(a\operatorname{sen}a-\frac{2}{5}\operatorname{sen}a+\frac{\cos a}{5})+\frac{1}{5(s-1)}$$

$$L\{t\,e^t\int_a^t F(t)dt\}=-\frac{d}{ds}[\frac{(s-1)^2-5}{(s-1)[(s-3)^2+1]^2}]-\frac{e^{2a}}{s-1}(a\operatorname{sen}a-\frac{2}{5}\operatorname{sen}a+\frac{\cos a}{5}+\frac{1}{5(s-1)})$$

$$=\frac{s^4-16s^3+120s^2-400s+460}{s[(s-3)^2+1]^3}+\frac{e^{2a}}{5(s-1)^2}(2a-5a\operatorname{sen}a-\cos a)$$

$$\therefore\quad L\{t\,e^t\int_a^t t\,F(t)dt\}=\frac{s^4-16s^3+120s^2-400s+460}{s[(s-3)^2+1]^3}+\frac{e^{2a}(2a-5a\operatorname{sen}a-\cos a)}{5(s-1)^2}$$

22) Hallar $L\{\int_t^{\infty}\frac{\operatorname{sen} u}{u}du\}$

Solución

Sea u = t v $\Rightarrow$ du = tdv, además se tiene cuando u = t; v = 1 y cuando u $\to\infty$, v $\to\infty$ ahora reemplazando se tiene:

$$L\{\int_t^{\infty}\frac{\operatorname{sen} u}{u}du\}=L\{\int_1^{\infty}\frac{\operatorname{sen} tv}{tv}.t\,dv\}=L\{\int_1^{\infty}\frac{\operatorname{sen} tv}{v}dv\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}[\int_1^{\infty}\frac{\operatorname{sen} tv}{v}dv]dt$$

$$=\int_1^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-st}\frac{\operatorname{sen} tv}{v}dt\,dv=\int_1^{\infty}\frac{1}{v}\int_0^{\infty}e^{-st}\operatorname{sen} tv\,dt\,dv$$

$$=\int_1^{\infty}\frac{1}{v}L\{\operatorname{sen} tv\}dv=\int_1^{\infty}\frac{1}{v}.\frac{v}{s^2+v^2}dv$$

$$=\int_1^{\infty}\frac{dv}{s^2+v^2}=\frac{1}{s}\operatorname{arctg}(\frac{v}{s})\Big/_1^{\infty}=\frac{1}{s}[\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{s}]$$

23) Hallar $L\{\int_t^{\infty}\frac{\cos u}{u}du\}$

Solución

Sea u = tv $\Rightarrow$ du = t dv , además se tiene: cuando u = t , v = 1 y cuando u $\to\infty$, v $\to\infty$, ahora reemplazando se tiene:

$$L\{\int_t^{\infty}\frac{\cos u}{u}du\}=L\{\int_1^{\infty}\frac{\cos tv}{tv}t\,dv\}=L\{\int_1^{\infty}\frac{\cos tv}{v}dv\}$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-st}[\int_1^{\infty}\frac{\cos tv}{v}dv]dt=\int_1^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-st}\frac{\cos tv}{v}dt\,dv$$

$$=\int_1^{\infty}\frac{1}{v}\int_0^{\infty}e^{-st}\cos tv\,dt\,dv=\int_1^{\infty}\frac{1}{v}L\{\cos tv\}dv=\int_1^{\infty}\frac{1}{v}.\frac{s}{s^2+v^2}dv$$

$$=s\int_1^{\infty}\frac{dv}{v(v^2+s^2)}=s\int_1^{\infty}\frac{1}{s^2}(\frac{1}{v}-\frac{v}{v^2+s^2})dv=\frac{1}{s}[\ln v-\frac{1}{2}\ln(v^2+s^2)]\Big/_1^{\infty}$$

$$=0-\frac{1}{s}\ln\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}=\frac{1}{s}\ln\sqrt{s^2+1}$$

24) Hallar $L\{\int_t^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx\}$

Solución

Sea $x = tv \Rightarrow dx = t\,dv$, además se tiene: cuando $x = t$, $v = 1$ y cuando $x \to \infty$, $v \to \infty$, ahora reemplazando se tiene:

$$L\{\int_t^{x}\frac{e^{-x}}{x}dx\} = L\{\int_1^{\infty}\frac{e^{-tv}}{tv}t\,dv\} = L\{\int_1^{\infty}\frac{e^{-tv}}{v}dv\}$$

$$= \int_0^{\infty}e^{-st}[\int_1^{\infty}\frac{e^{-tv}}{v}dv]dt = \int_1^{\infty}\frac{1}{v}\int_0^{\infty}e^{-tv}dt\,dv$$

$$= \int_1^{\infty}\frac{1}{v}L\{e^{-tv}\}dv = \int_1^{\infty}\frac{1}{v}.\frac{1}{s+v}dv$$

$$= \frac{1}{s}\int_1^{\infty}(\frac{1}{v}-\frac{1}{s+v})dv = \frac{1}{s}\ln\frac{v}{v+s}\Big/_1^{\infty} = 0-\frac{1}{s}\ln\frac{1}{s+1} = \frac{1}{s}\ln(s+1)$$

25) Demostrar que $\int_0^{\infty}\frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}dt = \ln 2$

Solución

Calculando $L\{\frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}\}$, se tiene: $L\{e^{-3t}-e^{-6t}\} = \frac{1}{s+3}-\frac{1}{s+6} = f(s)$

$$L\{\frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}\} = \int_s^{\infty}(\frac{1}{u+3}-\frac{1}{u+6})du = [\ln(u+3)-\ln(u+6)]\Big/_s^{\infty}$$

$$= \ln(\frac{u+3}{u+6})\Big/_s^{\infty} = 0-\ln(\frac{s+3}{s+6})$$

$L\{\frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}\} = \ln(\frac{s+6}{s+3})$, por definición se tiene:

$$\int_0^{\infty} e^{-st}.\frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}dt = \ln(\frac{s+6}{s+3}),$$ tomando límite cuando s → 0, se tiene

$$\lim_{s\to 0}\int_0^{\infty} e^{-st}.\frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}dt = \lim_{s\to 0}\ln(\frac{s+6}{s+3})$$

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}dt = \ln 2$$

26) Demostrar que: $\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}\,\text{sen}\,t}{t}dt = \frac{\pi}{4}$

Solución

Calculando la Transformada de Laplace: $L\{\frac{\text{sen}\,t}{t}\}$.

$$L\{\text{sen}\,t\} = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow L\{\frac{\text{sen}\,t}{t}\} = \int_s^{\infty}\frac{du}{u^2+1} = \text{arctg}\,u \Big/_s^{\infty} = \frac{\pi}{2}-\text{arctg}\,s$$

$$L\{\text{sen}\,t\} = \int_0^{\infty}\frac{e^{-st}\,\text{sen}\,t}{t}dt = \frac{\pi}{2}-\text{arctg}\,s,$$ tomando límite cuando s → 1, se tiene:

$$\lim_{s\to 1}\int_0^{\infty} e^{-st}.\frac{\text{sen}\,t}{t}dt = \lim_{s\to 1}(\frac{\pi}{2}-\text{arctg}\,s) = \frac{\pi}{2}-\text{arctg}\,1 = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \int_0^{\infty}\frac{e^{-t}\,\text{sen}\,t}{t}dt = \frac{\pi}{4}$$

27) Calcular $\int_0^{\infty} e^{-at}\frac{\text{sen}\,bt}{t}dt$, siendo a y b constante positivas.

Solución

Calculando la Transformada de Laplace de $L\{\frac{\text{sen}\,bt}{t}\}$

$$L\{\operatorname{sen} bt\} = \frac{b}{s^2+b^2} \Rightarrow L\{\frac{\operatorname{sen} bt}{t}\} = \int_s^{\infty} \frac{b\,du}{u^2+b^2} = \operatorname{arctg}\frac{u}{b} \Big/_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{s}{b}$$

$$L\{\frac{\operatorname{sen} bt}{t}\} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\frac{s}{b})$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\operatorname{sen} bt}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\frac{s}{b})$$, tomando límite cuando $s \to a$ se tiene:

$$\lim_{s\to a} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\operatorname{sen} bt}{t} dt = \lim_{s\to a} (\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\frac{s}{b}))$$

$$\int_0^{\infty} e^{-at} \frac{\operatorname{sen} bt}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\frac{a}{b})$$

28) Evaluar la integral $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} \operatorname{sen}^2 t}{t} dt$

Solución

Calculando la Transformada de Laplace de $L\{\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\}$

$$L\{\operatorname{sen}^2 t\} = \frac{1}{2} L\{1 - \cos 2t\} = \frac{1}{2}(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}) = f(s)$$

$$L\{\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\} = \frac{1}{2}\int_s^{\infty} (\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+4})du = \frac{1}{2}[\ln u - \frac{1}{2}\ln(u^2+4)] \Big/_s^{\infty}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{u^2}{u^2+4} \Big/_s^{\infty} = 0 - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{s^2}{s^2+4}\right|$$

$$L\{\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{s^2+4}{s^2}\right|$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t} dt = \frac{1}{4}\ln(\frac{s^2+4}{s^2})$$, tomando límite cuando $s \to 1$

$$\lim_{s\to 1}\int_0^{\infty} e^{-st}\frac{\text{sen}^2 t}{t}dt = \frac{1}{4}\lim_{s\to 1}\ln(\frac{s^2+4}{s^2})$$

$$\therefore \int_0^{\infty}\frac{e^{-t}\,\text{sen}^2 t}{t}dt = \frac{1}{4}\ln 5$$

29) Demostrar que: $\int_0^{\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}dt = \frac{\pi}{2}$

Solución

Calculando la Transformada de Laplace $L\{\frac{1-\cos t}{t^2}\}$

$$L\{1-\cos t\} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = f(s)$$

$$L\{\frac{1-\cos t}{t}\} = \int_s^{\infty}(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+1})du = [\ln u - \frac{1}{2}\ln(u^2+1)]\Big/_s^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(\frac{u^2}{u^2+1})\Big/_s^{\infty} = 0 - \frac{1}{2}\ln(\frac{s^2}{s^2+1})$$

$$L\{\frac{1-\cos t}{t}\} = \frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+1}{s^2})$$

$L\{\frac{1-\cos t}{t^2}\} = \int_s^{\infty}\frac{1}{2}\ln(\frac{u^2+1}{u^2})du$, integrando por partes

$$= \frac{1}{2}[u\ln(\frac{u^2+1}{u^2}) + 2\,\text{arctg}\,u]\Big/_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{s}{2}\ln(\frac{s^2+1}{s^2}) - 2\,\text{arctg}\,s$$

aplicando la Transformada de Laplace

$\int_0^{\infty} e^{-st}\frac{1-\cos t}{t^2}dt = \frac{\pi}{2} - \frac{s}{2}\ln(\frac{s^2+1}{s^2}) - 2\,\text{arctg}\,s$, tomando límite cuando s $\to$ 0

$$\lim_{s\to 0}\int_0^{\infty} e^{-st}\,\frac{1-\cos t}{t^2}\,dt = \lim_{s\to 0}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{s}{2}\ln\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right)-2\,\text{arctg}\,s\right]$$

$$\int_0^{\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}-0-0=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad \int_0^{\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

30) Calcular la integral $\int_0^{\infty}\frac{\cos u - e^u + \operatorname{sen} u}{u}\,du$

<u>**Solución**</u>

Calculando la transformada $L\{\frac{\cos u - e^u + \operatorname{sen} u}{u}\}$

$$L\{\cos u - e^u + \operatorname{sen} u\} = \frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s^2+1} = f(s)$$

$$L\{\frac{\cos u - e^u + \operatorname{sen} u}{u}\} = \int_s^{\infty}\left(\frac{u}{u^2+1}-\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u^2+1}\right)du$$

$$= [\frac{1}{2}\ln(u^2+1)-\ln(u-1)+ac\,\text{tg}\,u]\Big/_s^{\infty} = [\frac{1}{2}\ln\left(\frac{u^2+1}{(u-1)^2}\right)+\text{arctg}\,u]\Big/_s^{\infty}$$

$$= (0+\frac{\pi}{2})-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2+1}{(s-1)^2}\right)+\text{arctg}\,s$$

$$L\{\frac{\cos u - e^u + \operatorname{sen} u}{u}\} = \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2+1}{s^2-2s+1}\right)+\text{arctg}\,s$$

definiendo la Transformada de Laplace

$$= \int_0^{\infty} e^{-su} \frac{\cos u - e^u + \operatorname{sen} u}{u} du = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2+1}{s^2 .-2s+1}\right) + \operatorname{arctg} s$$

tomando límite cuando s→0

$$\lim_{s\to 0} \int_0^{\infty} e^{-su} \frac{\cos u - e^u + \operatorname{sen} u}{u} du = \lim_{s\to 0} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2+1}{s^2 - 2s+1}\right) + \operatorname{arctg} s\right]$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{\cos u - e^u + \operatorname{sen} u}{u} du = \frac{\pi}{2} - 0 + 0 = \frac{\pi}{2}$$

31) Demostrar que:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{1-\cos t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2} + \frac{s}{2} \ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right) - 2 \operatorname{arctg} s$$

<u>**Solución**</u>

$$L\{1-\cos t\} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = f(s)$$

$$L\{\frac{1-\cos t}{t}\} = \int_s^{\infty} \left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+1}\right) du = [\ln(u) - \frac{1}{2} \ln(u^2+1)] \Big/_s^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{u^2}{u^2+1}\right) \Big/_s^{\infty} = 0 - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)$$

$$L\{\frac{1-\cos t}{t}\} = \frac{1}{.2} \ln\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right) = g(s)$$

$$L\{\frac{1-\cos t}{t^2}\} = \frac{1}{2} \int_s^{\infty} \ln\left(\frac{u^2+1}{u^2}\right) du$$, integrando por partes

$$L\{\frac{1-\cos t}{t^2}\}=\frac{1}{2}[u\ln(\frac{u^2+1}{u^2})+2\operatorname{arctg} u]\Big/_s^{\infty}$$

$$L\{\frac{1-\cos t}{t^2}\}=\frac{\pi}{2}+\frac{s}{2}\ln(\frac{s^2}{s^2+1})-2\operatorname{arctg} s$$,definiendo la Transformada de Laplace

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\,\frac{1-\cot}{t^2}dt=\frac{\pi}{2}+\frac{s}{2}\ln(\frac{s^2}{s^2+1})-2\operatorname{arctg} s$$

32) Evaluar la integral $\int_0^{\infty} te^{-2t}\operatorname{sen} t dt$

Solución

$$L\{t\operatorname{sen} t\}=-\frac{d}{ds}L\{\operatorname{sen} t\}=-\frac{1}{ds}(\frac{1}{s^2+1})=\frac{2s}{(s^2+1)}$$

aplicando la definición de transformada

$$\int_0^{\infty} te^{-st}\operatorname{sen} t dt=\frac{2s}{(s^2+1)^2}$$, tomando límite cuando s→2, se tiene:

$$\lim_{s\to 2}\int_0^{\infty} e^{-st}\operatorname{sen} t dt=\lim_{s\to 2}\frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$\int_0^{\infty} te^{-2t}\operatorname{sen} t dt=\frac{4}{s^2}=\frac{4}{25}$$

33) Evaluar la integral $\int_0^{\infty}\frac{e^{-2t}-\cos t}{t}dt$

Solución

$$L\{e^{-2t}-\cos t\}=\frac{1}{s+2}-\frac{s}{s^2+1}=f(s)$$

$$[\ln(u+2)-\frac{1}{2}\ln(u^2+1)]\Big/_s^{\infty}=\frac{1}{2}\ln\frac{(u+2)^2}{u^2+1}\Big/_s^{\infty}=0-\frac{1}{2}\ln(\frac{(s+2)^2}{s^2+1})$$

$=\frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+1)}{s^2+4s+4})$, aplicando la definición de transformada se tiene:

$$\int_0^{\infty}e^{-st}\,\frac{(e^{-2t}-\cos t)dt}{t}=\frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+1}{s^2+4s+4})$$

$$\lim_{s\to 0}\int_0^{\infty}e^{-st}\,\frac{(e^{-2t}-\cos t)dt}{t}=\frac{1}{2}\lim_{s\to 0}\ln(\frac{s^2+1}{s^2+4s+4})$$

$$\therefore\int_0^{\infty}\frac{e^{-2t}-\cos t}{t}dt=-\ln 2$$

34) Evaluar la integral $\int_0^{\infty}e^{-2t}t\,\text{senh}\,tdt$

Solución

$$L\{t\,\text{senh}\,t\}=-\frac{d}{ds}L\{\text{senh}\,t\}=\frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2-1})=\frac{2s}{(s^2-1)^2}$$

aplicando la definición de transformada

$$\int_0^{\infty}te^{-st}\,\text{senh}\,tdt=\lim_{s\to 2}\frac{2s}{(s^2-1)^2},$$ tomando límite cuando s→2

$$\lim_{s\to 2}\int_0^{\infty}te^{-2t}\,\text{senh}\,tdt=\lim_{s\to 2}\frac{2s}{(s^2-1)^2}$$

$$\therefore\int_0^{\infty}te^{-2t}\,\text{senh}\,tdt=\frac{4}{9}$$

1.16 Ejercicios Propuestos.-

I.

1) Demostrase que $f(t) = t^x$, es de orden exponencial cuando t→∞ ; $\forall \in R$.

2) ¿La función $f(t) = t^t$ es de orden exponencial en $[0,+\infty>$?

Rpta. No es de orden exponencial

3) ¿Es $f(t) = t \operatorname{sen}\frac{1}{t}$ continua por tramos en $[0,+\infty>$?

Rpta. Si es continua por tramos en $[0,+\infty>$

4) ¿Cuales de las siguientes funciones son continuas por tramos en $[0,+\infty>$? Razónese la respuesta.

a. $f(t) = \dfrac{t+1}{t-1}$ **b.** $f(t) = \dfrac{t-2}{t^2-t-2}$

c. $f(t) = e^{1/t}$ **d.** $f(t) = t^2$

Rpta. **a.** no es continua por tramos en $[0,+\infty>$.

b. es continua por tramos en $[0,+\infty>$.

c. no es continua por tramos en $[0,+\infty>$.

d. es continua por tramos en $[0,+\infty>$.

5) Demostrar que para cualquier numero real α, $F(t) = e^{\alpha t} f(t)$ es continua por tramos en $[0,+\infty>$, siempre que f lo sea.

6) Demuéstrese que las funciones dadas son continuas por tramos y de orden exponencial en $[0,+\infty>$

a. $f(t)=t^n\cos kt$ b. $f(t)=\dfrac{1-\cos kt}{t}$ c. $f(t)=\dfrac{1-e^{-t}}{t}$

d. $f(t)=\dfrac{1-\operatorname{sen} kt}{t}$ e. $f(t)=t^n\cosh t$ f. $f(t)=\dfrac{\cos t-\cosh t}{t}$

7) Demostrar que el producto de dos funciones continuas por tramos en $[0,+\infty>$ es una función continua por tramos.

8) Hallar la transformada de Laplace $L\{F(t)\}$ si:

a. $f(t)=t^2\cos t$ b. $f(t)=t^2e^t\cos t$

c. $f(t)=(2t-3)e^{\frac{t+2}{3}}$ d. $f(t)=3e^{-t}\cos 2t$

Rpta. a. $f(s)=\dfrac{2s^3-6s}{(s^2+1)^3}$ b. $f(s)=\dfrac{2(s-1)^3-6(s-1)}{[(s-1)^2+1]^3}$

c. $f(s)=\dfrac{-3e^{2/3}}{3s-1}$ d. $f(s)=\dfrac{3s+3}{s^2+3s+s}$

9) Demostrar que $L\{t^2\operatorname{sen} t\}=\dfrac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$

10) Demostrar que $L\{\cos^3 t\}=\dfrac{s(s^2+7)}{(s^2+9)(s^2+1)}$

11) Halla $L\{t^3\cos t\}$ Rpta. $f(s)=\dfrac{6s^4-36s^2+6}{(s^2+1)^4}$

12) Halla $L\{\dfrac{\operatorname{sen}^2 t.\cos t}{t}\}$ Rpta. $f(s)=\dfrac{1}{8}\ln(\dfrac{s^2+9}{s^2+1})$

13) Halla $L\{\text{sen}(a+t)\}$ Rpta. $f(s)=\dfrac{\cos a+s.\text{sen}\, a}{s^2+1}$

14) Calcula $L\{\cos^2 bt\}$ Rpta. $f(s)=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{s}+\dfrac{s}{s^2+4b^2})$

15) Demostrar que:

a. $L\{\cosh^2(at)\}=\dfrac{s^2-2a^2}{s(s^2-4a^2)}$ b. $L\{\text{senh}^2(at)\}=\dfrac{2a^2}{s(s^2-4a^2)}$

c. $L\{\cos at.\text{sen}\, at\}=\dfrac{a(s^2+2a^2)}{s^4+4a^4}$ d. $L\{\cos at.\cos at\}=\dfrac{s^3}{s^4+4a^4}$

e. $L\{\text{senh}(at).\text{sen}(at)\}=\dfrac{2a^2 s}{s^4+4a^4}$ f. $L\{\text{senh}(at).\cos(at)\}=\dfrac{a(s^2-2a^2)}{s^4+4a^4}$

16) Hallar la transformada de Laplace de F(t) si

a. $F(t)=\begin{cases} t & , t<2 \\ 2 & , t>2 \end{cases}$ b. $F(t)=te^t\dfrac{d}{dt}(\text{sen}\, 2t)$

c. $F(t)=\begin{cases} \text{sen}\, t & , t<2\pi \\ 0 , & t>2\pi \end{cases}$ d. $F(t)=\begin{cases} 0 & , t<\dfrac{\pi}{2} \\ \cos t & , \dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{3\pi}{2} \\ 0 & , t>\dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$

e. $F(t)=\begin{cases} t & , t<2 \\ 8-3t & , 2\le t\le 3 \\ t-4 & , 3<t\le 4 \\ 0 & , t>4 \end{cases}$ f. $F(t)=e^{-3t}\int_0^t t\cos 4t\,dt$

g. $F(t)=\dfrac{d^2}{dt^2}\int_0^t e^{-t}\cos 3t\,dt$ h. $F(t)=te^t\int_0^t t\dfrac{d}{dt}(e^{2t}\,\text{sen}\, t)dt$

17) Si $f(s) = L\{f(t)\}$, demostrar que para r >0

$$L\{r^t F(at)\} = \frac{1}{a} f(\frac{s-\ln r}{a})$$

18) Demostrar que : $L\{t^2 \operatorname{sen} bt\} = \frac{6bs^2 - 2b^3}{(s^2+b^2)^3}$

19) Demostrar que: $L\{\frac{\operatorname{sen} t}{t}\} = \operatorname{arctg}\frac{1}{s}$

20) Calcular $L\{F(t)\}$ si:

a. $F(t) = e^{-3t}\int_0^t t \operatorname{sen} 2t dt$ **Rpta.** $F(s) = \frac{4}{(s^2+6s+13)^2}$

b. $F(t) = e^{-3t}\frac{\operatorname{sen} 2t}{t}$ **Rpta.** $F(s) = \operatorname{arctg}(\frac{s+3}{2})$

21) Calcular $L\{\int_0^t \frac{e^{-3t}\operatorname{sen} 2t}{t}dt\}$ **Rpta.** $F(s) = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{s+3}{2})$

22) Halla $L\{\frac{\operatorname{sen}^3 t}{t}\}$ **Rpta.** $f(s) = \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}.(\frac{3}{s})$

Sugerencia: $\operatorname{sen}^3 t = 3\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 3t$

23) Halla $L\{\frac{(e^{at}-e^{bt})^2}{t}\}$ **Rpta.** $f(s) = \ln(\frac{(s-a-b)^2}{(s-2a)(s-2b)}$

24) Halla $L\{\frac{\operatorname{sen} t + \operatorname{sen}^3 t}{t}e^t\}$ **Rpta.** $f(s) = \frac{7}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}(\frac{3}{s-1})$

25) Evaluar $L\{\operatorname{sen} kt.\cos kt\}$ **Rpta.** $f(s) = \frac{k}{s^2+4k^2}$, $s > 0$

26) Halla $L\{F(t)\}$ si $F(t)=e^{3t}\int_0^t t\cos 4t\,dt$ **Rpta.** $f(s)=\dfrac{16-(s-3)^2}{(s-3)[(s-3)^2+16]^2}$

27) Hallar $L\{F(t)\}$ si:

a. $F(t)=t\int_0^t e^{-3t}\operatorname{sen}2t\,dt$ **b.** $F(t)=t\int_0^t te^{-3t}\operatorname{sen}2t\,dt$

c. $F(t)=e^{-3t}\int_0^t \dfrac{\operatorname{sen}2t}{t}dt$ **d.** $F(t)=\int_0^t \dfrac{e^t-\cos 2t}{t}dt$

28) Halla $L\{F(t)\}$ si $F(t)=\begin{cases}\operatorname{sen}t & , t<4\pi\\ \operatorname{sen}t+\cos t & , t>4\pi\end{cases}$

29) Halla $L\{F(t)\}$ si $F(t)=\begin{cases}\cos t & , t<\dfrac{3\pi}{2}\\ \cos t+\operatorname{sen}t & , t>\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$

30) Halla $L\{F(t)\}$, donde:

$$F(t)=\begin{cases}t\cos\omega(t-\alpha) & , t>\alpha\\ 0 & , t<\alpha\end{cases}\quad ,\omega\ ,\alpha \text{ constantes}$$

31) Calcular $L\{\int_0^{2t}\dfrac{\operatorname{sen}u}{u}du\}$

32) Calcular $L\{\dfrac{1}{(1+e^{-t})^2}\}$

33) Hallar $L\{e^{3t}\cos 3t.\cos 4t\}$

34) Hallar $L\{(t+a)^n\}$, n es un entero positivo.

Rpta. $f(s)=n!(\frac{a^n}{(n-1)!s}+\frac{a^{n-1}}{(n-2)!s^2}+...+\frac{a}{1!s^n}+\frac{1}{s^{n+1}}$

35) Calcular $L\{\int_0^{2t} e^{2\alpha}\int_0^{3t} e^{\mu-\alpha}\frac{\operatorname{sen}2\mu}{\mu}d\mu d\alpha\}$

36) Calcular $L\{[\![t]\!]-\sqrt{|t|}\}$

37) Hallar $L\{\operatorname{sen}at.\cos bt\}$

38) Hallar $L\{e^{at}\operatorname{sen}^2 bt\}$

39) Hallar $L\{\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t e^{-t}\cos 3t dt\}$

40) Calcular $L\{e^{3t}t^3\operatorname{sen}^2 t\}$

41) Calcular $L\{\sqrt{t}\cos t^{3/2}\}$ **Rpta.** $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma(3n+3/2)}{(2n)!s^{3n+3/2}}$

42) Demostrar que: $L\{\operatorname{sen}t^2\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(4n-2)!}{(2n-1)!s^{4n}}$

43) Demostrar que:

$$L\{\int_a^t\int_0^t f(t)dtdt\}=\frac{1}{s^2}L\{f(t)\}+\frac{1}{s^2}\int_a^0 f(t)dt+\frac{1}{s}\int_0^t f(t)dt$$

44) Demostrar que:

$$L\{F'''(t)\}=s^3 L\{F(t)\}-s^2F(0)-sF'(0)-F''(0)$$

45) Demostrar que:

$$L\{t^n\ln t\}=\frac{\Gamma'(n+1)-\ln s.\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}\quad,\ n>-1$$

46) Calcular: $L\{\int_0^{2t}(\int_0^x(\int_0^{2y}\frac{\operatorname{sen}z}{z}dz)dy)dx\}$

47) Demostrar que: $L\{\frac{\operatorname{sen} b}{1+e^{-at}}\} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{b}{(s+an)^2+b^2}$

48) Calcular $L\{\frac{1}{a}\int_0^{at} e^{\frac{b}{a}t} F(\frac{t}{a})\,dt\}$, a ≠ 0. **Rpta.** $f(s) = \frac{1}{s}\varphi\ (sa-b)$

49) Demostrar que:

$$L\{\int_0^t \int_0^x \int_0^y \frac{\operatorname{sen} z}{z}\,dz\,dy\,dx\} = \frac{1}{s^2}\operatorname{arctg}(-\frac{1}{s})$$

50) Demostrar que:

$L\{\int_t^{at} \frac{\operatorname{sen} y}{y}\,dy\} = \frac{1}{s}\operatorname{arctg}(\frac{(a-1)s}{s^2+a^2})$ donde “a” es una constante positiva.

51) Si $L\{F''(t)\} = \operatorname{arctg}(\frac{1}{s})$, $F(0) = 2$, $F'(0) = -1$. Hallar $L\{F(t)\}$

52) Calcular $L\{\int_0^{at}\int_x^{\infty}(\frac{e^{-u}-e^{-2u}}{u})\,du\,dx\}$

Rpta. $f(s) = \frac{a}{s^2}\ln(\frac{2(s+a)}{s+2a})$

53) Hallar $L\{\frac{\operatorname{sen}^3 t}{t^2}\}$ **Rpta.** $f(s) = -\frac{3}{4}\lim_{b\to+\infty}\int_s^b \operatorname{arctg}(\frac{2u}{3u^2})\,du$

54) Calcular $\int_0^{\infty} e^{-s^2 t}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ **Rpta.** $f(s) = \operatorname{arctg}(\frac{1}{s^2})$

55) Calcular la Transformada de Laplace de:

$$L\{t\,e^t\int_a^t z\frac{d}{dz}(e^{2z}\operatorname{sen} z)\,dz\}$$

56) Demostrar que: $L\{\int_0^{at}\int_0^{ax} u\,e^{-u}F(u)\,du\,dx\} = -\frac{a}{s^2}H'(\frac{s}{a^2}+1)$

57) Hallar $L\{\frac{\cos at-\cos bt}{t\,e^t}\}$ **Rpta.** $f(s) = \frac{1}{2}\ln(\frac{(s+1)^2+b^2}{(s+1)^2+a^2})$

58) Calcular $L\{\int_0^{2t} t\,e^{u-2t}(\frac{\operatorname{sen} u}{u})du\}$ **Rpta.** $f(s)=\frac{arct\,(2/s)}{(s+2)^2}-\frac{s^2}{(s^2+4)(s+2)}$

59) Demostrar que: $L\{\int_0^{2t}\int_0^{x}(\int_0^{2y}\frac{\operatorname{sen} z}{z}dz)\,dy\,dx\}=\frac{4}{s^3}\operatorname{arctg}(\frac{4}{s})$

60) Calcular $L\{\int_0^{-t}\frac{\operatorname{sen} u}{u}du\}$ **Rpta.** $f(s)=\frac{1}{s}\operatorname{arctg}(-\frac{1}{s})$

61) Calcular $L\{\int_0^{t}\int_0^{-t}\frac{\operatorname{sen} u}{u}du\,du\}$ **Rpta.** $f(s)=\frac{1}{s^2}\operatorname{arctg}(-\frac{1}{s})$

62) Demostrar que: $L\{\int_0^{bt}\int_0^{ax}\int_y^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du\,dy\,dx\}=\frac{ab^2}{s^3}\ln(\frac{s}{ab}+1)$

63) Demostrar que: $L\{\int_0^{t}\int_0^{-x}\int_0^{-y}(\frac{\operatorname{sen} z}{z})dz\,dy\,dx\}=-\frac{1}{s^3}\operatorname{arctg}(\frac{1}{s})$

64) Demostrar que: $L\{\int_0^{t}\int_0^{-x}\int_0^{-y}(\frac{\operatorname{sen} z}{z})dz\,dy\,dx\}=\frac{1}{s^2}\operatorname{arctg}(-\frac{1}{s})$

65) Calcular $L\{\int_0^{2t}\frac{\cos 3z-\cos 2z}{z}dz\}$

Rpta. $f(s)=\frac{1}{2s}\ln(\frac{s^2+16}{s^2+36})$

66) Calcular $L\{\int_0^{t}e^{t}z\frac{d}{dz}(e^{2z}\operatorname{sen} z)dz\}$

Rpta. $f(s)=\frac{1}{(s-1)}[\frac{(s-1)^2-5}{((s-3)^2+1)^2}]$

67) Demostrar que: $L\{\operatorname{sen}^6 t\}=\frac{6!}{s(s^2+1)(s^2+16)(s^2+36)}$

68) Demostrar que: $L\{\operatorname{sen}^5 t\}=\frac{120}{(s^2+1)(s^2+9)(s^2+25)}$

69) Si $L\{t\,F(t)\}=\dfrac{1}{s(s^2+1)}$. Hallar $L\{e^{-t}F(2t)\}$

Rpta. $f(s)=\ln\left(\dfrac{(s^2+2s+8)^{1/4}}{(s+2)^{1/2}}\right)$

70) Si existe, calcular $L\{-\int_{-t}^{0} e^{-4t+u}\dfrac{\operatorname{sen}^3 u}{u^2}du\}$

71) Sin derivar y usando solo las propiedades de Transformada; calcular

$$L\{t\frac{d}{dt}\int_t^{4t}\frac{\operatorname{sen}^2 u}{u^2}du\}$$

72) Calcular $L\{t^n \operatorname{sen} at\}$, si $n\in z_0^+$ y n $\in$ R, n > -1

73) Calcular $L\{\dfrac{e^{-4t}\cos t}{(1-e^{-6t})^4}\}$

74) Calcular $L\{\dfrac{1-\cos nt}{t^2}\}$

75) Calcular $L\{\dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}\}$

76) Calcular $L\{\dfrac{e^{-at}\operatorname{sen}^2 t}{t^3}\}$

77) Calcular $L\{t^2\dfrac{d}{dt}(\dfrac{e^{-bt}\operatorname{sen}^2 t}{t^3})\}$ sin derivar.

78) Si L{F(t)} = H(s), calcular $L\{\int_0^t dv\int_0^v F(u)du\}$

79) Solo usando propiedades sin derivar calcular $L\{e^t\int_a^t t\dfrac{d}{dt}(e^{2t}\operatorname{sen} t)dt\}$

80) Calcular $L\{\int_0^t\dfrac{d}{dt}(t\,e^{-t^2})dt\}$, sin derivar solo usando propiedades.

81) Sea [0,∞> → R una función de clase A. Si L{F(t)} = φ(s), calcular $L\{\dfrac{1}{a}e^{\frac{b}{a}t}F(\dfrac{t}{a})\}$, a > 0.

82) Hallar L{2 + |t - 2|}

83) Demostrar que $L\{e^{t}\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\} = \operatorname{arctg}(\dfrac{1}{s-1})$

84) Demostrar que $L\{\int_0^t\int_0^{2y}\dfrac{\operatorname{sen} z}{z}\,dz\,dy\} = \dfrac{1}{s^2}\operatorname{arctg}(\dfrac{2}{s})$

85) Evaluar si existe $L\{t\int_{2t}^{4t} e^{-2t}(\dfrac{\operatorname{sen}^2 u}{u^2})du\}$

86) Sean a, b, u , v y A constantes, probar que:

$$L\{at^{-u} + bt^{-v}\} = A(a\,s^{-u} + b\,s^{-v}) \Leftrightarrow u+v=1 \text{ y } A = \pm\sqrt{\pi \csc \pi u}$$

87) Hallar una fórmula para: $L\{t^n \operatorname{sen} at\}$, a > 0.

88) Calcular $L\{\int_0^x\int_0^{2y} u^{1/2}\cos u^{3/2}\,du\,dy\}$

89) Hallar la transformada de Laplace $L\{x^2\int_1^x u\operatorname{sen} u\,du + \int_0^x u\,e^{2u}\operatorname{sen} u\,du\}$

90) Hallar $L\{\dfrac{t^{n-1}}{1-e^{-t}}\}$, donde n es un entero positivo.

Rpta. $f(s) = \sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(n-1)!}{(s+k)^n}$

91) Determinar la transformada. $L\{\dfrac{\operatorname{sen} t}{1+e^{-t}}\}$

Rpta. $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(s+n)^2+1}$

92) Calcular $L\{\dfrac{e^t \operatorname{sen} t}{(1+e^{-t})^2}\}$

Rpta. $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}n}{(s+n-2)^2+1}$

93) Calcular $L\{\dfrac{e^{-t}-e^{-2t}}{1+e^{-3t}-e^{-t}-e^{-2t}}\}$

Rpta. $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(s+n)^2}-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(s+2n)^2}$

94) Calcular $L\{\dfrac{t^2}{e^t+e^{2t}}\}$

Rpta. $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2}{(s+2n+3)^2}$

95) Hallar $L\{t^3\,\mathrm{tgh}(t)\}$

Rpta. $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 6}{(s+2n)^4}-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 6}{(s+2n+2)^4}$

96) Calcular $L\{\dfrac{e^{4t}\,\mathrm{sen}\,t}{(1-e^{-3t})^2}\}$

97) Calcular $L\{t^{-1/2}F(t)\}$ si $F(t)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n t^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)n!}$

98) Usando propiedades calcular la transformada $L\{t\dfrac{d}{dt}\int_t^{3t}\dfrac{d}{dt}(\dfrac{\mathrm{sen}^2\,t}{t^3})dt\}$

99) Usando propiedades, calcular la transformada $L\{e^{3t}\int_0^{2t}\left|\cos\omega\,u\right|du\}$

100) Solo usando propiedades, calcular la transformada $L\{\int_0^t\dfrac{d}{dt}(t^n\,\mathrm{sen}\,at)dt\}$

101) Hallar $L\{e^{-2t}\int_0^t\dfrac{\mathrm{sen}\,u}{u}du\}$ **Rpta.** $f(s)=\dfrac{\mathrm{arctg}(s+2)}{s+2}$

102) Sea F(x) una función real, definida por:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & , \ si \quad x\in[0,1> \\ \int_0^{\infty}\left(\dfrac{e^t-e^{2t}+\text{sen}\, x\, t^2}{t}\right)dt & , \ si \ x\in[1,2] \\ 0 & , \ si \ x>2 \end{cases}$$

Hallar L{F(x)} **Rpta.** $f(s)=\frac{1}{s}(\frac{\pi}{8}+\ln 2)(e^{-s}-e^{-2s})$

103) Hallar $L\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\}$ **Rpta.** $f(s)=\frac{\pi\, e^{-\frac{1}{4s}}}{\sqrt{s}}$

104) Si $\begin{cases} 0, & 0\le t\le a \\ t^n, & t>a \end{cases}$, calcular $L\{t\int_0^t e^{-4t+v}F(v)dv\}$

105) Calcular la transformada de Laplace de la función

$$F(t)=\begin{cases} \left|t-[\![|t|]\!]\right| & \text{si } [\![|t|]\!] \text{ es par} \\ \left|t-[\![|t+1|]\!]\right| & \text{si } [\![|t|]\!] \text{ es impar} \end{cases}$$

106) Calcular $L\{\pi(t+a)^{-1/2}\}$ sug. Es un el binomio de Newton.

107) Si $H(t)=\begin{cases} \left|t-[\![|t|]\!]\right| & \text{si } [\![|t|]\!] \text{ es par o cero} \\ \left|t-[\![|t+1|]\!]\right| & \text{si } [\![|t|]\!] \text{ es impar} \end{cases}$

Calcular $L\{t\, e^{-4t}\int_0^{6t} a^t H(u)du\}$, a > 0

108) Si $G(t)=\begin{cases} (t-[\![|t|]\!])^2 & \text{si } [\![|t|]\!] \text{ es par o cero} \\ 1-(t-[\![|t|]\!])^2 & \text{si } [\![|t|]\!] \text{ es impar} \end{cases}$

Calcular $L\{t^2e^{-4t}\frac{d}{dt}(\int_0^t G(u)du)\}$

109) Calcular $L\{\int_0^t \frac{d}{dt}(t\, e^{-t^2})dt\}$

110) Calcular $L\{\dfrac{\cos at - \cos bt}{t\,e^t}\}$ **Rpta.** $f(s)=\dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{(s-1)^2+b^2}{(s-1)^2+a^2})$

111) Calcular $L\{t\int_0^t e^u \dfrac{\operatorname{sen} u}{u}du\}$ **Rpta.** $f(s)=\dfrac{1}{s^2}\operatorname{arctg}(\dfrac{1}{s-1})+\dfrac{1}{s(1+(s-1)^2)}$

112) Calcular $L\{\int_0^{-3t}\int_0^{3x}\dfrac{1-e^{-y}}{y}dy\,dx\}$

113) Calcular $L\{t^{-1/2}\cos at^{1/2}\}$ **Rpta.** $f(s)=\sqrt{\dfrac{\pi}{s}}e^{-\frac{a^2}{4s}}$, $s>0$

114) Calcular $L\{\dfrac{e^{at}-\cos bt}{t}\}$, a, b $\neq 0$

115) Calcular $L\{\int_0^t \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x}dx\}$

116) Calcular $L\{t\,e^{-8t}\dfrac{d^2}{dt^2}\int_0^t e^{-t}\cos 4t\,dt\}$

117) Calcular $L\{t\,e^t\int_a^t t\dfrac{d}{dt}(e^{2t}\operatorname{sen} t)dt\}$

118) Calcular $L\{t\,e^{6t}\operatorname{senh}\sqrt{t}\}$

119) Hallar la Transformada de Laplace $L\{t\int_0^t \dfrac{e^{-2t}\operatorname{sen} 2t}{t}dt\}$

120) Hallar la Transformada de Laplace $L\{t\,e^{-2t}\cos 3t\}$

121) Calcular $L\{t\int_0^t \operatorname{sen} x\,dx\}$

122) Calcular $L\{e^{-t}(2\operatorname{senh} 2t-5\cosh 2t)\}$

123) Calcular $L\{t\int_0^t e^{-2t}\frac{\operatorname{sen} 2t}{t}dt\}$

124) Calcular $L\{t\int_0^t e^{-3t}\frac{\operatorname{sen} 3t}{t}dt\}$

II.-

1) Evaluar la integral $\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}dt$ **Rpta.** $\ln 3$

2) Calcular la integral $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} at-\cos bt}{t}dt$ **Rpta.** $\ln(\frac{a}{b})$

3) Evaluar la integral $\int_0^\infty t\,e^{-2t}\cos t\,dt$ **Rpta.** $\frac{3}{25}$

4) Demostrar que: $\int_0^\infty e^{\sqrt{2}t}\frac{\operatorname{senh} t.\operatorname{sen} t}{t}dt=\frac{\pi}{8}$

5) Demostrar que: $\int_0^\infty e^{-\sqrt{2}t}\frac{\operatorname{sen} 6t.\operatorname{sen} t}{t}dt=\frac{\pi}{8}$

6) Demostrar que: $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}dt=\frac{\pi}{2}$

7) Demostrar que: $\int_0^\infty t\,e^{-3t}\int_0^t t\,e^{-2t}\operatorname{sen} t\,dt\,dt=\frac{1}{6}$

8) Calcular la integral $\int_0^\infty e^{-3u}\int_0^t t\cos 4t\,dt\,du$ **Rpta.** $\ln 2$

9) Calcular $\int_0^\infty e^{4t}\frac{\cos at-\cos bt}{t}dt$ **Rpta.** $\frac{1}{2}\ln(\frac{16+b^2}{16+a^2})$

10) Calcular la integral $\int_0^\infty e^{-t}\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}du\,dt$

11) Demostrar que: $\int_{t=0}^{\infty}\int_{u=0}^{t} e^{-t}\frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du\,dt=\frac{\pi}{4}$

12) Evaluar $\int_0^{\infty}\frac{\cosh 2t-\cos 4t}{t}dt$ **Rpta.** $\frac{1}{2}\ln 4$

13) Evaluar $\int_0^{\infty} t^2 e^{-2t}\operatorname{sen} t\,dt$ **Rpta.** $\frac{22}{125}$

14) Evaluar $\int_0^{\infty} t\,e^{-2t}\operatorname{senh} t\,dt$ **Rpta.** $\frac{4}{9}$

15) Evaluar $\int_0^{\infty}\frac{e^{-2t}-\cos t}{t}dt$ **Rpta.** $-\ln 2$

16) Demostrar que: $\int_0^{\infty} e^{-st}\frac{1-\cos nt}{t^2}dt=\frac{n\pi}{2}+\frac{s}{2}\ln(\frac{s^2}{s^2+n^2})-n.\operatorname{arctg}(\frac{s}{n})$,

$\forall\ n\in Z^+$ y calcular $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos nt}{t^2}dt$ **Rpta.** $\frac{n\pi}{2}$

17) Usando Transformada de Laplace calcular $\int_0^{\infty} J_0(u^4)du$

18) Calcular $\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}dx$, usando Transformada de Laplace si a, b > 0.

19) Usando Transformada de Laplace, calcular $\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{x^P}dx$, $0<P<1$

Rpta. $\frac{\pi}{2\Gamma(P)}(\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{P\pi}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{P\pi}{2}})$, $0<P<1$

20) Calcular $\int_0^{\infty} e^{-at^2-t}dt$ **Rpta.** $\frac{e^{\frac{1}{4a}}\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}f_{erc}(\frac{1}{2\sqrt{a}})$

21) Evaluar la integral $\int_0^{\infty} \frac{\cos 6t - \cos 4t}{t} dt$ **Rpta.** $\ln(\frac{2}{3})$

22) Evaluar la integral $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 4t - \operatorname{sen} 2t}{t} dt$ **Rpta.** 0

23) Calcular el valor de $\int_0^{\infty} t e^{-2t} \cos t \, dt$ **Rpta.** $\frac{3}{25}$

24) Demostrar que: $\int_0^{\infty} e^{-st} (\frac{1-\cos nt}{t^2}) dt = \frac{n\pi}{2} + \frac{s}{2} \ln\left|\frac{s^2}{s^2+n^2}\right| - n.\operatorname{arctg}(\frac{s}{n})$ y $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos nt}{t^2} dt = \frac{n\pi}{2}$

25) Calcular $\int_0^{\infty} \int_0^{t} e^{-t} \frac{\operatorname{sen}^2 u}{u^2} du \, dt$

26) Calcular $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t . \operatorname{sen} at}{t} dt$

27) Calcular $\int_0^{\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx$

28) Calcular $\int_0^{\infty} t^3 e^{-t} \operatorname{sen} t \, dt$

29) Evaluar $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} tx}{x} dx$

30) Calcular $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{(8-x)^{7/3}} dx$

31) Calcular $\int_1^{3} \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$

32) Calcular $\int_0^{2} (4-x^2)^{3/2} dx$

33) Calcular $\int_0^{2} (4-x^2)^{3/2} dx$

CAPITULO II

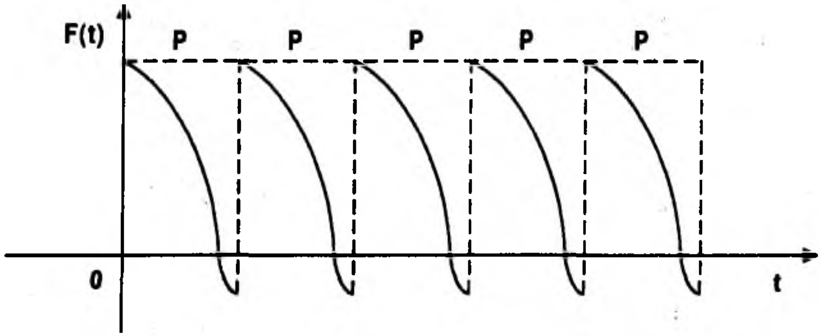
2. FUNCIONES ESPECIALES.-

2.1. FUNCION PERIODICA.-

La función $F: R \to R$, se dice que es una función periódica si $\exists\, p > 0$, tal que:

$$\boxed{F(t+p) = F(t)\,,\quad \forall\, t \in R}$$

y al menor número $p > 0$, que satisface la condición de periodicidad se denomina período de la función



Si F(t) es una función seccionalmente continua a lo largo de un intervalo de longitud P y de orden exponencial, entonces su Transformada de Laplace existe y es la integral de cero al infinito.

2.2 Teorema.-

Si $F: [0,+\infty> \to R$, es una función continua por tramos, de orden exponencial y periódica con período P. Entonces:

$$L\{F(t)\} = \frac{\int_0^P e^{-st} F(t)dt}{1 - e^{-ps}}$$

Demostración

Como F(t) es continua por tramos y de orden exponencial entonces $\exists$ L{F(t)}

$$L\{F(t)\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}F(t)dt=\int_0^{P}e^{-st}F(t)dt+\int_P^{2P}e^{-st}F(t)dt+\int_{2p}^{3P}e^{-st}F(t)dt+\ldots$$

Como F(t) es una función periódica con período P $\neq$ 0, entonces a partir de la segunda integral se tiene:

t = u + p, t = u + 2p, t = u + 3p, ..., entonces

$$L\{F(t)\}=\int_0^{P}e^{-su}F(u)du+\int_P^{2P}e^{-s(u+p)}F(u+p)du+$$

$$+\int_{2p}^{3P}e^{-s(u+2p)}F(u+2p)du+\int_{3p}^{4P}e^{-s(u+3p)}F(u+3p)du+\ldots$$

$$=\int_0^{P}e^{-su}F(u)du+e^{-sp}\int_0^{P}e^{-su}F(u)du+e^{-2sp}\int_0^{P}e^{-su}F(u)du+\ldots\ldots$$

$$=(1+e^{-sp}+e^{-2sp}+e^{-3sp}+\ldots)\int_0^{P}e^{-su}F(u)du$$

$$L\{F(t)\}=(1+e^{-sp}+e^{-2sp}+e^{-3sp}+\ldots)\int_0^{P}e^{-su}F(u)du \quad \ldots \textbf{(1)}$$

pero se conoce que: $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots,$ para $|x|<1$

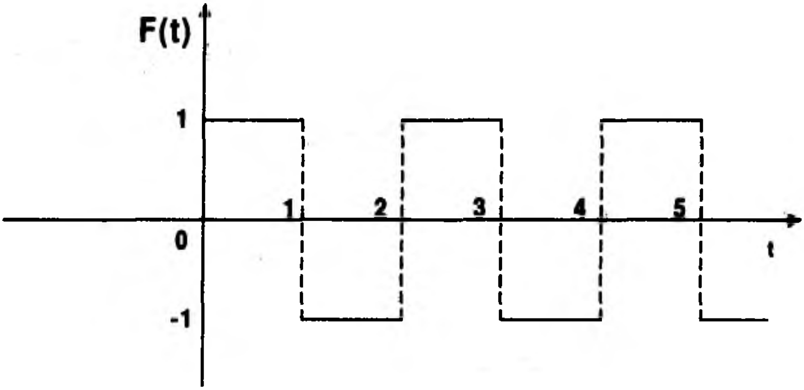
Luego $1+e^{-sp}+e^{-2sp}+\ldots=\dfrac{1}{1-e^{-sp}}$ **... (2)**

por lo tanto al reemplazar (2) en (1) se tiene:

$$L\{F(t)\}=\frac{1}{1-e^{-sp}}\int_0^{P}e^{-su}F(u)du$$

$$\therefore \quad L\{F(t)\}=\frac{\int_0^{P}e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-ps}}$$

Ejemplo.- Hallar la transformada de Laplace de la función que se muestra en la figura.



<u>Solución</u>

La función F(t) del gráfico es periódica de período P = 2 es decir:

$$F(t)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad 0<t<1\\ -1 & \text{si} \quad -1<t<2\end{cases}, \quad F(t+2)=F(t)\ ,\ \forall\, t$$

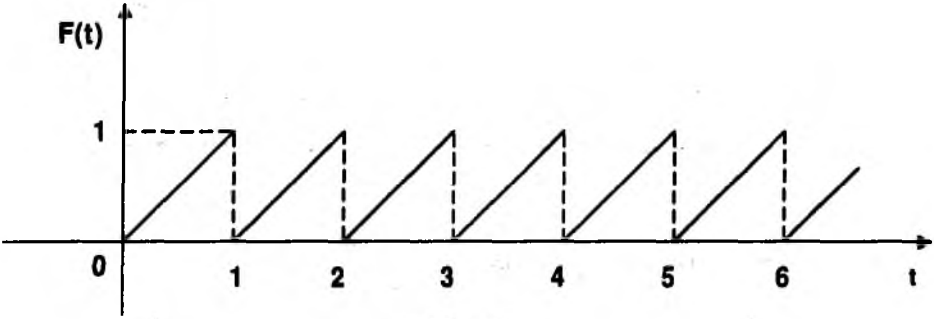
$$L\{F(t)\}=\frac{\int_0^P e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-ps}}=\frac{\int_0^2 e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-2s}}$$

$$=\frac{\int_0^1 e^{-st}F(t)dt+\int_1^2 e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-2s}}=\frac{\int_0^1 e^{-st}dt+\int_1^2 e^{-st}dt}{1-e^{-2s}}$$

$$=\frac{e^{-2s}-2e^{-s}+1}{s(1-e^{-2s})}=\frac{(1-e^{-s})^2}{s(1-e^{-2s})}=\frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})}=\frac{e^{s}-1}{s(e^{s}+1)}=\frac{1}{s}\operatorname{tg}(\frac{s}{2})$$

$$\therefore \quad L\{F(t)\}=\frac{1}{s}\operatorname{tgh}(\frac{s}{2})$$

Ejemplo.- Hallar L{F(t)} donde F(t) es la función periódica que se muestra en la figura.



Solución

La función F(t) es periódica, de período P = 1, donde F(t) = t, para 0 < t < 1 y F(t) = F(t + 1), ∀ t su Transformada de Laplace es dado por:

$$L\{F(t)\} = \frac{\int_0^p e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-ps}} = \frac{\int_0^1 e^{-st}tdt}{1-e^{-s}} = \frac{1}{1-e^{-s}} = [-\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}] \Big/_0^1$$

$$= \frac{1}{1-e^{-s}} = (-\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{1}{s^2})$$

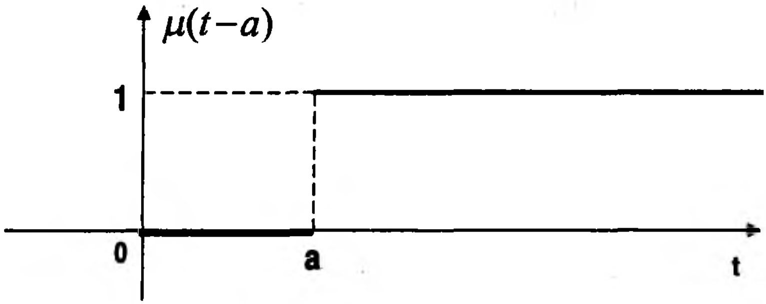
$$\therefore \quad L\{F(t)\} = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$$

2.3 Función Escalón Unidad.-

A la función "Escalón Unidad" llamada también función unitario de HEAVISIDE es denotada por $\mu(t-a) = \mu_a(t)$ y es definida como:

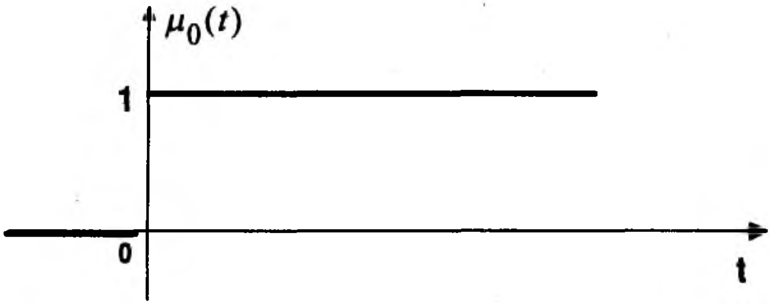
$$\mu(t-a) = \mu_a(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ 1 & si \quad t \geq a \end{cases}$$

su gráfico es:



cuando a = 0, se tiene: $\mu_0(t) = \mu(t-0) = \begin{cases} 0 & si \quad t<0 \\ 1 & si \quad t \geq 0 \end{cases}$

su gráfico es:



La función $\mu_a(t)$ es continua en <0,+∞>, a pesar que $\mu_a(t)$ tiene un punto de discontinuidad en x = a, la Transformada de Laplace de $\mu(t-a) = \mu_t(a)$ es:

$$L\{\mu_a(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\mu(t-a)dt = \int_0^a e^{-st}\mu(t-a)dt + \int_a^{+\infty} e^{-st}\mu(t-a)dt$$

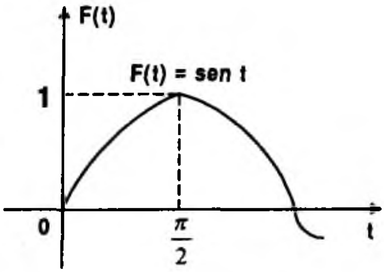
$$= 0 + \int_a^{+\infty} e^{-st}\mu(t-a) = \int_a^{+\infty} e^{-st}dt = \frac{e^{-st}}{s}\Big/_a^{+\infty} \quad \text{para } s>0$$

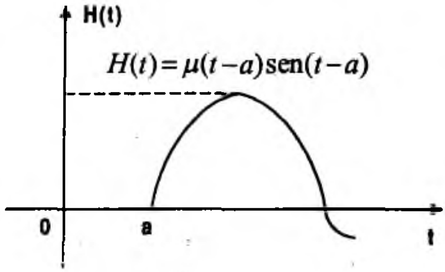
$$= -\frac{1}{s}[0 - e^{-as}] = \frac{e^{-as}}{s}$$

$$\therefore \; L\{\mu(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$$

Observación.- Toda función F puede ser trasladada "a" unidades a la derecha del punto a.

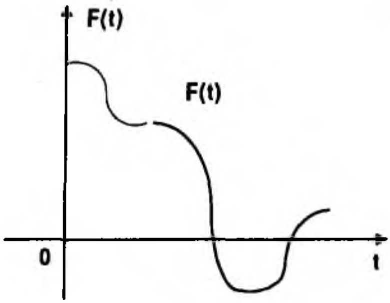
Ejemplo. La función F(t)=sent

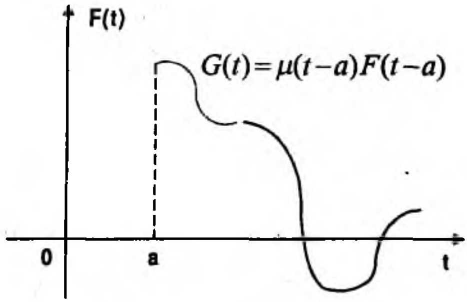




$$H(t)=\begin{cases}0 & si \quad t<0\\ \operatorname{sen}(t-a) & si \quad t\geq a\end{cases}$$

En general dada una función F: [a.+∞>→R, se puede trasladar a la derecha, de tal manera que la función valga cero en [0,a> y se define la función $G(t)=\mu(t-a)\,F(t-a)$.





Observación. Si $L\{F(t)\}$ existe para s > a ≥ 0, entonces podemos calcular $L\{\mu(t-a)\,F(t-a)\}$ en función de $L\{F(t)\}$.

I) Teorema. Sea F: [0+,∞> → R, una función de clase A entonces

$$L\{\mu(t-a)F(t-a)\}=e^{-as}L\{F(t)\}$$

<u>Demostración</u>

Mediante la definición de transformada.

$$L\{\mu(t-a)F(t-a)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\mu(t-a)F(t-a)dt$$

$$= \int_0^{a} e^{-st}\mu(t-a)F(t-a)dt + \int_a^{\infty} e^{-st}\mu(t-a)F(t-a)dt$$

$$= \int_a^{+\infty} e^{-st}F(t-a)dt \qquad \ldots (1)$$

Sea $t - a = z \Rightarrow t = a + z$

$$\text{para } \begin{cases} t = a & ; \quad z = 0 \\ t \to \infty \; ; & z \to \infty \end{cases} \qquad \ldots (2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$L\{\mu(t-a)F(t-a)\} = \int_a^{+\infty} e^{-st}F(t-a)dt = \int_0^{+\infty} e^{-st(a+z)}F(z)dz$$

$$= e^{-as}\int_0^{+\infty} e^{-sz}F(z)dz = e^{-as}\int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt = e^{-as}L\{F(t)\}$$

$$\therefore L\{\mu(t-a)F(t-a)\} = e^{-as}L\{F(t)\}$$

ii) **Teorema.** Sea F: [0,+∞> → R, una función de clase A, entonces $L\{\mu(t-a)F(t)\} = e^{-as}L\{F(t+a)\}$

Demostración

Mediante la definición de transformada se tiene:

$$L\{\mu(t-a)F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\mu(t-a)F(t)dt$$

$$= \int_0^{a} e^{-st}\mu(t-a)F(t)dt + \int_a^{\infty} e^{-st}\mu(t-a)F(t)dt$$

$$= \int_a^{+\infty} e^{-st}F(t)dt \qquad \ldots (1)$$

Sea $t = z + a$, cuando $\begin{cases} t \to 0 & ; \ z \to 0 \\ t \to +\infty & ; \ z \to +\infty \end{cases}$ ... **(2)**

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$L\{\mu(t-a)F(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-s(a+z)} F(a+z)dz$$

$$= e^{-sa} \int_0^{+\infty} e^{-az} F(z+a)dz$$

$$= e^{-as} \int_0^{+\infty} e^{-at} F(t+a)dt = e^{-as} L\{F(t+a)\}$$

$$\therefore \ L\{\mu(t-a)F(t)\} = e^{-as} L\{F(t+a)\}$$

Observación.-

Sea F: [0,+∞> → R, una función de clase A, tal que:

$$\boxed{F(t) = \begin{cases} F_1(t) & ; \quad 0 < t < a \\ F_2(t) & ; \quad t > a \end{cases}}$$

Luego la función F(t) se puede escribir en términos de la función escalón unidad.

$$\boxed{F(t) = F_1(t) + (F_2(t) - F_1(t))\mu(t-a)}$$

Generalizando; Si F: [0,+∞> → R, es una función de clase A, tal que:

a la función F(t) se expresa en la forma siguiente:

$$F(t) = \begin{cases} F_1(t) \ , \ si \ 0 < t < a_1 \\ F_2(t) \ , \ si \ a_1 < t < a_2 \\ F_3(t) \ , \ si \ a_2 < t < a_3 \\ . \\ . \\ . \\ F_n(t) \ , \ si \ t > a_{n-1} \end{cases}$$

Luego a la función F(t) se puede expresar en términos de la función escalón unidad.

$$F(t)=F_1(t)+(F_2(t)-F_1(t))\mu\ (t-a_1)+(F_3(t)-F_2(t))\mu\ (t-a_2)$$
$$+\ldots+(F_n(t)-F_{n-1}(t))\mu\ (t-a_{n-1})$$

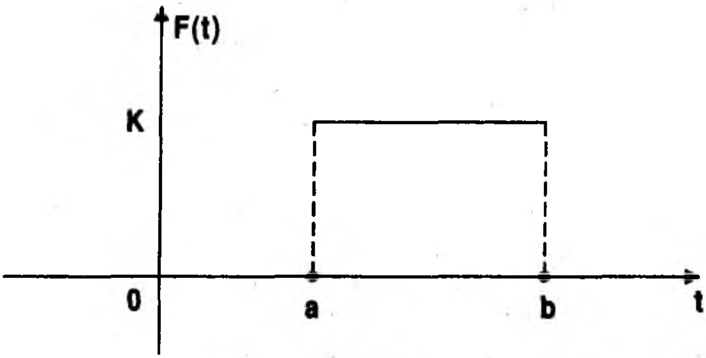
Ejemplo.- Escribir en términos de la función escalón unidad, la función.

$$F(t)=\begin{cases} t^2 & ,\ si\ 0<t<2 \\ 4t & ,\ si\ t>2 \end{cases}$$

Solución

$$F(t)=t^2+(4t-t^2)\mu(t-2)$$

Ejemplo.- Encontrar la Transformada de Laplace de la función que se muestra en la figura.



Solución

Escribiendo la función en términos de la función escalón unidad se tiene:

F(t) = k[μ (t - a) - μ (t - b)] y su Transformada de Laplace es :

$$L\{F(t)\} = k\ L\{\mu\ (t-a)\} - k\ L\{\mu\ (t-b)\} = \frac{k\,e^{-as}}{s} - \frac{k\,e^{-bs}}{s}$$

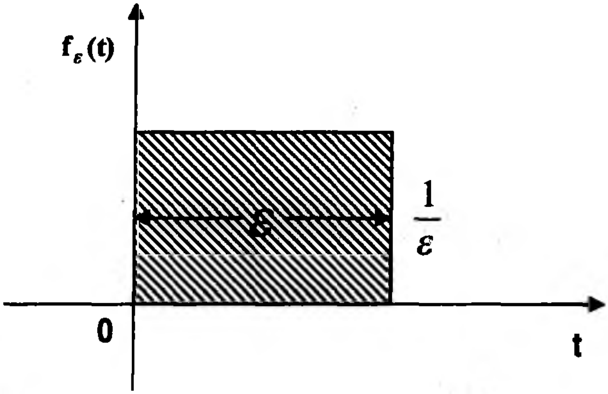
$$\therefore\ L\{F(t)\}=\frac{k}{s}(e^{-as}-e^{-bs})$$

2.4 Función Impulso Unitario ó Función Delta de Diroc.-

Consideremos la función $f_\varepsilon(t)$, definido por:

$$\boxed{f_\varepsilon(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon} & si \quad 0\le t\le \varepsilon \\ 0 & si \quad t>\varepsilon\end{cases}}$$

donde ε > 0, y que es muy pequeño. Su gráfica es:



A la función $f_\varepsilon(t)$, así definida se le denomina función impulso, y cuando ε →0, la altura de la región rectangular sombreada crece indefinidamente y la base decrece, de tal manera que el área siempre es igual a 1, es decir:

$$\boxed{A=\int_0^\infty f_\varepsilon(t)dt=1}$$

a la función $\delta(t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(t)$ se denomina función impulso unitario o función Delta de Dirac, otra forma de definir la función δ(t) que frecuentemente es empleada en electrónica es: $\delta(t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(\mu(t)-\mu(t-\varepsilon))$

Ahora calcularemos su Transformada de Laplace

$$L\{f_\varepsilon(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f_\varepsilon(t)dt = \int_0^{\varepsilon} e^{-st} f_\varepsilon(t)dt + \int_\varepsilon^{\infty} e^{-st} f_\varepsilon(t)dt$$

$$= \int_0^{\varepsilon} \frac{e^{-st}}{\varepsilon} dt = -\frac{e^{-st}}{\varepsilon s} \Big/_0^{\varepsilon} = -\frac{e^{-s\varepsilon}}{\varepsilon s} + \frac{1}{\varepsilon s}$$

$$\therefore \quad L\{f_\varepsilon(t)\} = \frac{1 - e^{-s\varepsilon}}{\varepsilon s}$$

como $\delta(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(t) \Rightarrow L\{\delta(t)\} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} L\{f_\varepsilon(t)\}$

$$L\{\delta(t)\} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1 - e^{-s\varepsilon}}{\varepsilon s} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{s e^{-s\varepsilon}}{s} = 1$$

$\therefore \quad L\{\delta(t)\} = 1$, además $L\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$

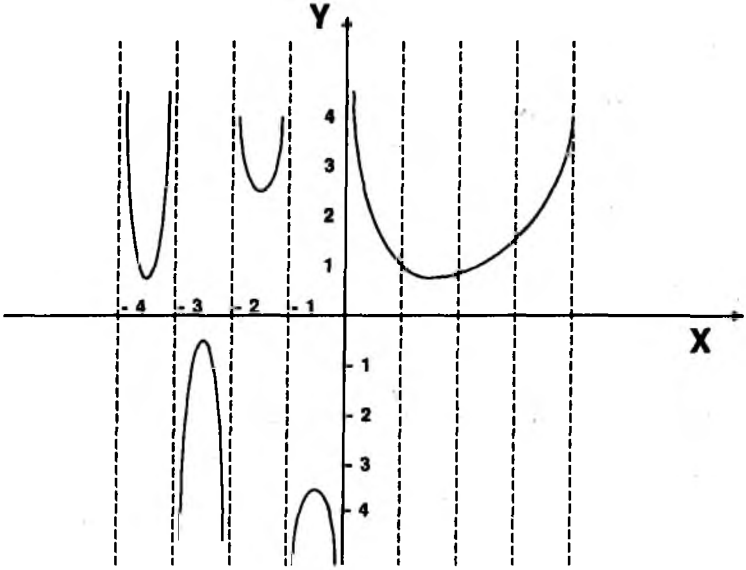
2.5 La Función Gamma.

Es una integral paramétrica definida por:

$$\boxed{\Gamma(n) = \int_0^{\infty} \mu^{n-1} e^{-u} d\mu} \quad \text{...(1)}$$

Esta integral es convergente para valores positivos n > 0, y para valores negativos n exceptuando los valores -1,-2,-3,-4..., a la función Gamma también se denomina función factorial y se aplica en las ecuaciones diferenciales que admiten soluciones por series infinitas.

Su representación gráfica es:



En la siguientes tabla se indica algunos valores de $\Gamma(n)$ donde $0 < n \leq 1$, calculados según (1) mediante series infinitas.

N	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
Γ(n)	9.5	4.59	2.99	2.22	$\sqrt{\pi}$	1.49	1.30	1.16	1.07

La integral $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} \mu^{n-1} e^{-\mu} d\mu$, no define ningún valor n = 0, pero define los valores de $\Gamma(n)$ para todos los números reales de la siguiente forma:

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

2.6 Propiedades de la Función Gamma.

1. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \quad \forall n > -1$

Demostración

Por definición de función Gamma se tiene:

$$\Gamma(n+1)=\int_0^{\infty} e^{-u}\mu^{(n+1)-1}d\mu=\int_0^{+\infty}\mu^{n}e^{-\mu}d\mu=\lim_{p\to+\infty}\int_0^{p}\mu^{n}e^{-u}d\mu$$

integrando por partes:

$$\begin{cases}\omega=\mu^{n}\\ dv=e^{-u}d\mu\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d\omega=n\mu^{n-1}d\mu\\ v=-e^{-\mu}\end{cases}$$

$$\Gamma(n+1)=\lim_{p\to+\infty}[-\mu^{n}e^{-\mu}\,/_{0}^{p}+n\int_0^{p}\mu^{n-1}e^{-\mu}d\mu]$$

$$=\lim_{p\to+\infty}-p^{n}e^{-p}+\lim_{p\to+\infty}n\int_0^{p}\mu^{n-1}e^{-u}d\mu=0+n\int_0^{+\infty}\mu^{n-1}e^{-u}d\mu=n\Gamma(n)$$

$$\therefore\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$$

2. $\Gamma(n+1)=n!\ ,\ \forall n\in Z^{+}$

Demostración

Aplicando repetidas veces la propiedad (1)

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)$$

$$=n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-(n-1))\Gamma(1)$$

$$=n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots,3.2.1\,\Gamma(1)=n\Gamma(1)=n! \qquad \therefore\Gamma(n+1)=n!$$

Observación. $\Gamma(1)=\int_0^{\infty}\mu^{1-1}e^{-\mu}d\mu=\int_0^{\infty}e^{-\mu}d\mu=1$

$$\therefore\Gamma(1)=1$$

2.7 Teorema. Demostrar que: $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

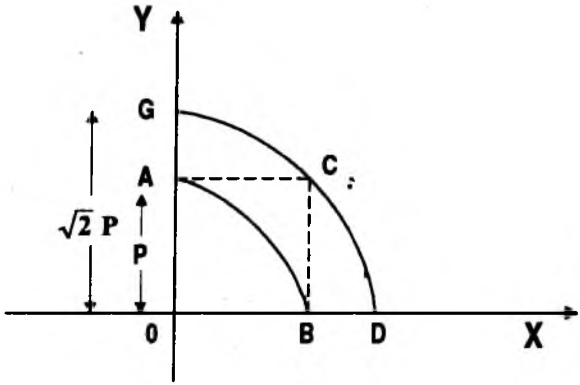
Demostración

Consideremos : $I_p = \int_0^p e^{-x^2}dx = \int_0^p e^{-y^2}dy$

y sea $I = \lim\limits_{p\to\infty} I_p$, el valor de la integral.

Luego $I^2{}_p = (\int_0^p e^{-x^2}dx)(\int_0^p e^{-y^2}dy) = \int_0^p\int_0^p e^{-x^2-y^2}dxdy$

$I^2{}_p = \iint\limits_{R_p} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$, donde R_p es el cuadrado o ABC, de lado P



Sea R_1 la región en el primer cuadrante, comprendida por la circunferencia de radio P. es decir : $\iint\limits_{R_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ y sea R_2 la región en el primer cuadrante, comprendida por la circunferencia de radio $\sqrt{2}P$ es decir: $\iint\limits_{R_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$.

Luego : $\iint\limits_{R_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \le I^2{}_p \le \iint\limits_{R_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$

por medio de coordenadas polares (r, θ) se tiene:

$$\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^p e^{-r^2}rdr\right)d\theta \le I^2{}_p \le \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^p e^{-r^2}rdr\right)d\theta$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{1-e^{-p^2}}{2}d\theta \le I^2{}_p \le \int_0^{\pi/2}\frac{1-e^{-2p^2}}{2}d\theta$$

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-p^2}) \le I^2{}_p \le \frac{\pi}{4}(1-e^{-2p^2}),$$

tomando límite cuando $p\to+\infty$, se tiene:

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{\pi}{4}(1-e^{-p^2}) \le \lim_{p\to+\infty} I^2{}_p \le \lim_{p\to+\infty}\frac{\pi}{4}(1-e^{-2p^2})$$

$\frac{\pi}{4} \le I^2 \le \frac{\pi}{4}$ de donde se tiene $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$\therefore \int_0^{+\infty} e^{-\mu^2}d\mu = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Ejemplo de aplicación.

Demostrar que: $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

Solución

Por definición de la función Gamma se tiene:

$\Gamma(n)=\int_0^{+\infty}\mu^{n-1}e^{-\mu}d\mu$, de donde: $\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^{+\infty}\mu^{\frac{1}{2}-1}e^{-\mu}d\mu=\int_0^{+\infty}\mu^{-1/2}e^{-\mu}d\mu$

Sea $\mu=x^2 \Rightarrow d\mu=2xdx$

cuando $x=0$, $\mu=0$ y cuando $x\to+\infty$; $\mu\to+\infty$

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^{+\infty}\mu^{-1/2}e^{-\mu}d\mu=\int_0^{+\infty}x^{-1}e^{-x^2}.2xdx=2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=2(\frac{\sqrt{\pi}}{2})=\sqrt{\pi}$$

$$\therefore \Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

2.8 La Función Beta.

A la función $B: R^+ x R^+ \to R$, definida por la integral

$$\boxed{B(m,n) = \int_0^1 \mu^{m-1}(1-\mu)^{n-1}\,d\mu}$$

donde m > 0, n > 0, se denomina función Beta.

2.9 Propiedades de la Función Beta.

1. $B(m,n) = B(n,m)$

Demostración

Por la definición de función Beta se tiene:

$$B(m,n) = \int_0^1 \mu^{m-1}(1-\mu)^{n-1}\,d\mu$$

sea $Z = 1-\mu \Rightarrow dz = -d\mu$, además cuando $\begin{matrix} \mu = 0, \; z = 1 \\ \mu = 1, \; z = 0 \end{matrix}$

$$B(m,n) = \int_0^1 \mu^{m-1}(1-\mu)^{n-1}\,d\mu = -\int_1^0 z^{n-1}(1-z)^{m-1}\,dz$$

$$= \int_0^1 z^{n-1}(1-z)^{m-1}\,dz = B(n,m)$$

$$\therefore B(m,n) = B(n,m)$$

2. $B(m,n) = \dfrac{\Gamma(m).\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

Demostración

Por definición de la función Beta se tiene:

$$B(m,n)=\int_0^1 \mu^{m-1}(1-\mu)^{n-1}d\mu$$

sea $g(t)=\int_0^t \mu^{m-1}(1-\mu)^{n-1}d\mu$, calculando su Transformada de Laplace se tiene: por el teorema de convolución.

$$L\{g(t)\}=\Gamma(m)\Gamma(n)\frac{1}{S^m.S^n}=\Gamma(m)\Gamma(n).\frac{1}{S^{m+n}}$$

$$g(t)=\Gamma(m)\Gamma(n)L^{-1}\{\frac{1}{S^{m+n}}\}\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}t^{m+n-1}$$

$$g(t)=\int_0^t \mu^{m-1}(1-\mu)^{n-1}d\mu=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}t^{m+n-1}$$

$$g(1)=\int_0^1 \mu^{m-1}(1-\mu)^{n-1}d\mu=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

$$\therefore B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2m-1}\theta.\cos^{2n-1}\theta\, d\theta=\frac{1}{2}B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$

<u>Demostración</u>

De la propiedad (2) se tiene:

$$B(m,n)=\int_0^1 \mu^{m-1}(1-\mu)^{n-1}d\mu=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

sea $z=\cos^2\theta \Rightarrow dz=-2\cos\vartheta\operatorname{sen}\theta d\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta\cos\theta d\theta=-\dfrac{dz}{2}$

cuando $\theta=0,\quad z=1;\quad \theta=\dfrac{\pi}{2},\quad z=0$

$$\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2m-1}\theta.\cos^{2n-1}\theta\, d\theta=\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2m-2}\theta.\cos^{2n-2}\theta.\operatorname{sen}\theta.\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2\theta)^{m-1} (\cos^2\theta)^{n-1} \operatorname{sen}\theta.\cos\theta\, d\vartheta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^0 (1-z)^{m-1} z^{n-1} dz = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-z)^{m-1} z^{n-1} dz = \frac{1}{2} B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1}\theta.\cos^{2n-1}\theta\, d\theta = \frac{1}{2} B(m.n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}$$

2.10 La Función de Bessel.

La ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$t^2 y''(t) + ty'(t) + (t^2 - p^2) y(t) = 0 \ldots (1)$,

se llama ecuación diferencial de Bessel de orden p, con $p \geq 0$.

Ahora buscaremos las soluciones en serie de potencias al rededor del punto t = 0, el cual es un punto singular regular.

Sea $y(t) = t^p \sum_{k=0}^{\infty} a_n t^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_n t^{k+p}$, $p \geq 0$

calculando las derivadas correspondientes se tiene:

$$y'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+p) a_k t^{k+p-1} \quad , \quad \text{y} \quad y''(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+p)(k+p-1) a_k t^{k+p-1}$$

ahora reemplazando en la ecuación diferencial dada

$$t^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+p)(k+p-1) a_k t^{k+p-2} + t \sum_{K=0}^{\infty} (k+p) a_k t^{k+p-1} + (t^2 - p^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+p} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+p)(k+p-1) a_k t^{k+p} + \sum_{K=0}^{\infty} (k+p) a_k t^{k+p} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+p+2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^2 t^{k+p} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+p)^2-p^2]a_k t^{k+p}+\sum_{K=0}^{\infty}a_k t^{k+p+2}=0$$

poniendo en una misma potencia a t

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+p)^2-p^2]a_k t^{k+p}+\sum_{K=2}^{\infty}a_{k-2} t^{k+p}=0$$

poniendo los inicios iguales

$$(p^2-p^2)a_0 t^p+(2p+1)a_1 t^{1+p}+\sum_{k=2}^{\infty}[(k+p)^2-p^2]a_k t^{k+p}+\sum_{K=2}^{\infty}a_{k-2} t^{k+p}=0$$

$$(2p+1)a_1 t^{1+p}+\sum_{k=2}^{\infty}[(k^2+2pk)a_k+a_{k-2}]t^{k+p}=0$$

$$\begin{cases}(2p+1)a_1=0\\(k^2+2pk)a_k+a_{k-2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=0\\a_k=-\dfrac{a_{k-2}}{k^2+2pk}\end{cases},\ \forall\ k\geq 2$$

$$k=2\ \Rightarrow a_2=-\frac{a_0}{2(2p+2)}$$

$$k=3\ \Rightarrow a_3=-\frac{a_1}{3(2p+3)}=0\Rightarrow a_3=0$$

$$k=4\ \Rightarrow a_4=-\frac{a_2}{4(2p+4)}=(-1)^2\frac{a_0}{2.4.(2p+2)(2p+4)}$$

$$k=5\ \Rightarrow a_5=-\frac{a_3}{5(2p+5)}=0\Rightarrow a_5=0$$

$$k=6\ \Rightarrow a_6=-\frac{a_4}{6(2p+6)}=(-1)^3\frac{a_0}{2.4.6(2p+2)(2p+4)(2p+6)}$$

$$a_{2k-1} = 0 \ , \ \forall \ k \geq 1$$

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2.4.6.8\ldots(2k)(2p+2)(2p+4)\ldots(2p+2k)}$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2.4.6.8\ldots(2k)\,2^k\,(p+1)(p+2)(p+3)\ldots(p+k)}$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2.3.4.5\ldots k.2^{2k}\,(p+1)(p+2)(p+3)\ldots(p+k)}$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{k!2^{2k}\,(p+1)(p+2)(p+3)\ldots(p+k)} \ , \ \forall k \geq 1$$

como $y(t) = t^p \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = t^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_0}{k!2^{2k}\,(p+1)(p+2)\ldots(p+k)} t^{2k}$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_0}{k!\,2^{2k}\,(p+1)(p+2)\ldots(p+k)} t^{2k+p}$$

consideremos $a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}$ se tiene:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,2^p 2^{2k}\,\Gamma(p+1)(p+1)(p+2)\ldots(p+k)} t^{2k+p}$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(p+1)(p+1)(p+2)\ldots(p+k)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+p}$$

Esta función es una de las soluciones linealmente independiente de la ecuación diferencial de Bessel y es llamado "Función de Bessel de orden p y de primera clase" y denotaremos en la forma siguiente:

$$J_p(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(p+1).(p+1)(p+2)\ldots(p+k)}(\frac{t}{2})^{2k+p}$$

a. Definición. A la función de Bessel de primera clase y de orden n, denotaremos por $J_n(t)$ y es definido por la serie.

$$J_n(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!\Gamma}(\frac{t}{2})^{2k+n}\ ,\ k\geq 0$$

si n = 0, se obtiene $J_0(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}(\frac{t}{2})^{2k}$

Llamada función de Bessel de orden cero.

Observación. Se ha obtenido una solución linealmente independiente.

$$J_p(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(p+1).(p+1)(p+2)\ldots(p+k)}(\frac{t}{2})^{2k+p}$$

se sabe que: $(p+1)\Gamma(p+1)=\Gamma(p+2)$

$$(p+2)\Gamma(p+2)=\Gamma(p+3)$$

$$(p+3)\Gamma(p+3)=\Gamma(p+4)$$

$$\vdots$$

$$(p+k)\Gamma(p+k)=\Gamma(p+k+1)$$

de donde:

$$J_p(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(p+k+1)}(\frac{t}{2})^{2k+p}\quad \text{ó}\quad J_p(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(p+k)!}(\frac{t}{2})^{2k+p}$$

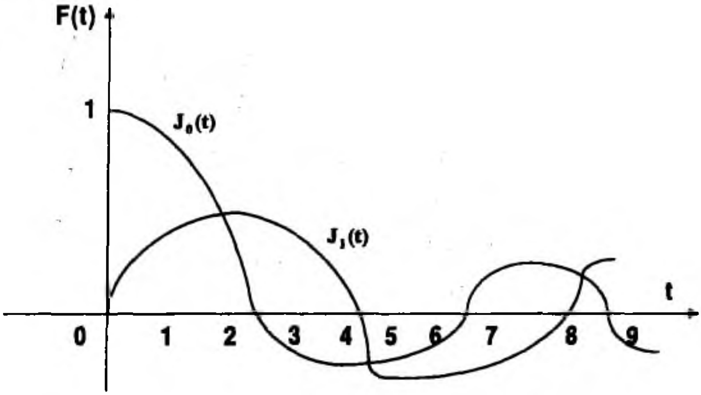
La segunda solución linealmente independiente de la ecuación diferencial de Bessel es:

$$J_{-p}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-p+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k-p} \quad \text{ó} \quad J_{-p}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k-p)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k-p}$$

Observación. Las funciones de Bessel de mayor utilidad son los de orden cero $J_0(t)$ y las de orden uno, $J_1(t)$ y son expresados así:

$$J_0(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k} \quad \text{y} \quad J_1(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+1}$$

el gráfico de estas funciones es:



b. Propiedades de la Función Bessel.

1. $J_{-n}(t)=(-1)^n J_n(t)$, si $n\in Z^+$

2. $J_{n+1}(t)=\dfrac{2n}{t}J_n(t)-J_{n-1}(t)$

3. $\dfrac{d}{dt}\{t^n J_n(t)\}=t^n J_{n-1}(t)$

4. $n=0,\ J_0'(t)=-J_1(t)$

5. $\dfrac{d}{dt}\{t^{-n} J_n(t)\}=-t^{-n}J_{n+1}(t)$

6. $J_{n-1}(t)-J_{n+1}(t)=2J_n'(t)$

7. $J_{\frac{1}{2}}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\,\operatorname{sen} t$ 8. $J_{-\frac{1}{2}}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos t$

9. $J_{\frac{3}{2}}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}-\cos t\right)$ 10. $e^{\frac{t}{2}\left(\frac{u-1}{u}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t)u^n$

Se conoce con el nombre de función generadora para las funciones de Bessel

Ejemplo. Hallar $L\{J_0(t)\}$, donde $J_0(t)$ es la función de Bessel de orden cero.

Solución

$$J_n(t)=\frac{t^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left(1-\frac{t^2}{2-(2n+2)}+\frac{t^4}{2.4.(2n+2)(2n+4)}-\frac{t^6}{2.4.6(2n+2)(2n+4)(2n+6)}+\ldots\right)$$

$$J_0(t)=1-\frac{t^2}{2^2}+\frac{t^4}{2^2.4^2}-\frac{t^6}{2^2.4^2.6^2}+\frac{t^8}{2^2.4^2.6^2.8^2}-\ldots$$

$$L\{J_0(t)\}=L\{1-\frac{t^2}{2^2}+\frac{t^4}{2^2.4^2}-\frac{t^6}{2^2.4^2.6^2}+\frac{t^8}{2^2.4^2.6^2.8^2}-\ldots\}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{2!}{2^2.s^3}+\frac{4!}{2^2.4^2.s^5}-\frac{6!}{2^2.4^2.6^2.s^7}+\frac{8!}{2^2.4^2.6^2.8^2.s^9}-\ldots$$

$$=\frac{1}{s}[-1\frac{1}{2}(\frac{1}{s})^2+\frac{1.3}{2.4}(\frac{1}{s})^4-\frac{1.3.5}{2.4.6}(\frac{1}{s})^6+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}(\frac{1}{s})^2-\ldots]$$

$$=\frac{1}{s}.\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{s^2}}}=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

$$\therefore\ L\{J_0(t)\}=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

Ejemplo. Calcular $L\{\dfrac{1-J_0(t)}{t}\}$

Solución

$$L\{1-J_0(t)\}=\frac{1}{s}-\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}=f(s)$$

$$L\{\frac{1-J_0(t)}{t}\}=\int_s^{\infty}(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\sqrt{\mu^2+1}})d\mu\ =[\ln\mu-\ln\left|\mu+\sqrt{\mu^2+1}\right|]\,\Big/_s^{\infty}$$

$$=\ln(\frac{\mu}{u+\sqrt{\mu^2+1}})\,\Big/_s^{\infty}=0-\ln(\frac{s}{s+\sqrt{s^2+1}})\ =\ln(\frac{s\sqrt{s^2+1}}{s})$$

$$\therefore\ L\{\frac{1-J_0(t)}{t}\}=\ln\frac{s\sqrt{s^2+1}}{s}$$

Ejemplo. Demostrar que: $\int_0^{\infty}t^2J_0(t)dt=-1$

Solución

Se sabe que $L\{J_0(t)\}=\dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}$, entonces

$$L\{t^2J_0(t)\}=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}(\frac{1}{\sqrt{s^2+1}})=\frac{3s^2}{(s^2+1)^{5/2}}-\frac{1}{(s^2+1)^{3/2}}$$

Ahora aplicando la definición de transformada de Laplace.

$$\int_0^{+\infty}e^{-st}t^2J_0(t)dt=\frac{3s^2}{(s^2+1)^{5/2}}-\frac{1}{(s^2+1)^{3/2}},$$

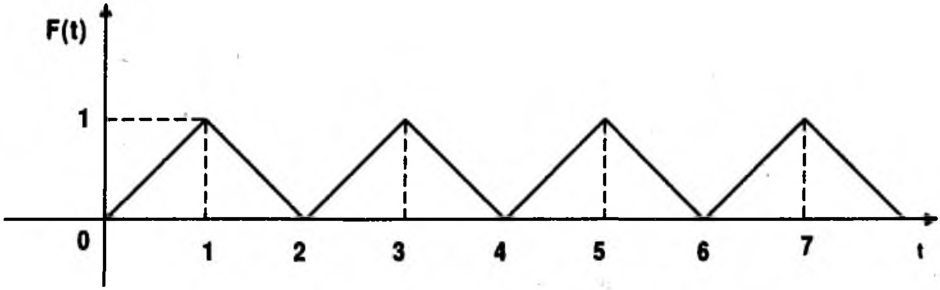
tomando límite cuando s→0

$$\lim_{s\to 0}\int_0^{+\infty}e^{-st}t^2J_0(t)dt=\lim_{s\to 0}(\frac{3s^2}{(s^2+1)^{5/2}}-\frac{1}{(s^2+1)^{3/2}})=0-1=-1$$

$$\therefore\ \int_0^{+\infty}t^2J_0(t)dt=-1$$

2.11 Ejercicios Desarrollados.

1. Muestre que la función F(t)cuya gráfica es la onda triangular que se muestra en la figura, tiene como transformada de Laplace $L\{F(t)\}=\frac{1}{s^2}\text{tgh}(\frac{s}{2})$.



Solución

Si $t\in<0,1>\Rightarrow m_1=1\Rightarrow F(t)=t$

Si $t\in<1,2>\Rightarrow m_2=-1\Rightarrow F(t)=2-t$

Luego $F(t)=\begin{cases} t, & si\ \ t\in<0,1> \\ 2-t, & si\ \ t\in<1,2> \end{cases}$

donde F(t) es periódica de período p=2

como $L\{F(t)\}=\dfrac{\int_0^p e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-ps}}=\dfrac{\int_0^2 e^{-st}F(t)}{1-e^{-2s}}dt$

$$=\frac{1}{1-e^{-2s}}[\int_0^1 e^{-st}tdt+\int_1^2 e^{-st}(2-t)dt]$$

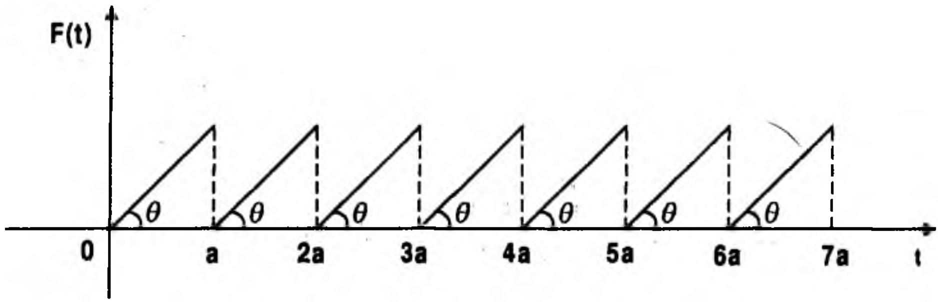
$$=\frac{1}{1-e^{-2s}}[(-\frac{t}{s}-\frac{1}{s^2})e^{-st}\Big/_0^1+(\frac{t}{s}+\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s})e^{-st}\Big/_1^2]$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2s}}(\frac{e^{-2s}-2e^{-s}+1}{s^2})=\frac{1-e^{-s}}{s^2(1+e^{-s})}=\frac{1}{s^2}\text{tgh}\,(\frac{s}{2})$$

$$\therefore\ L\{F(t)\} = \frac{1}{s^2}\,\text{tgh}\left(\frac{s}{2}\right)$$

Nota. $\quad \text{tgh}\, t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \dfrac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} = \dfrac{1 - e^{-2t}}{1 + e^{-2t}}$

2. Hallar la transformada de Laplace de la función periódica que se muestra en la figura.



<u>**Solución**</u>

Definiremos la función periódica F(t) donde el período es p = a, si $t \in [0, a] \Rightarrow m = \text{tg}\,\theta$, luego la función es: $F(t) = t.\text{tg}\,\theta$, con período p = a.

Ahora calculamos la Transformada de Laplace de: $F(t) = \text{tg}\,\theta.t$

$$L\{F(t)\} = L\{Tg\theta.t\} = \frac{\int_0^a e^{-st}\,\text{tg}\,\theta.tdt}{1 - e^{-as}} = \frac{\text{tg}\,\theta}{1 - e^{-as}} \int_0^a e^{-st}\,tdt\,.$$

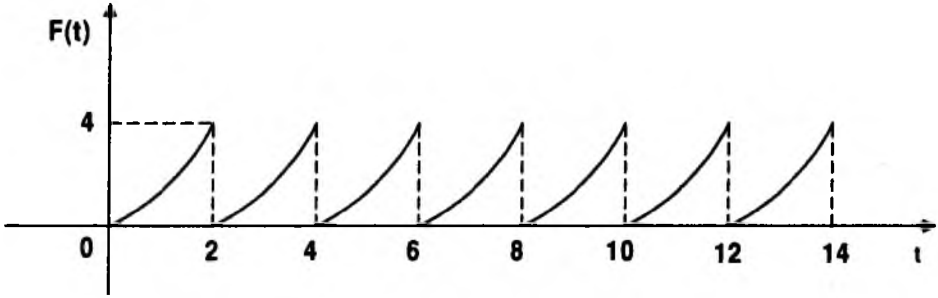
$$= \frac{\text{tg}\,\theta}{1 - e^{-as}}\left(-\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right)\Big/_0^a = \frac{\text{tg}\,\theta}{1 - e^{-as}}\left(\frac{1 - e^{as} - as\,e^{-as}}{s^2}\right)$$

$$\therefore\ L\{F(t)\} = \frac{\text{tg}\,\theta\,(1 - e^{-as} - as\,e^{-as}}{s^2\,(1 - e^{-as})})$$

3. Si $F(t)=t^2$, $0<t<2$ y $F(t+2)=F(t)$ hallar $L\{F(t)\}$

Solución

Graficando la función periódica de F(t) se tiene:



$$L\{F(t)\}=\frac{\int_0^p e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-ps}}=\frac{\int_0^2 e^{-st}t^2(t)dt}{1-e^{-2s}}=\frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 t^2e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left(-\frac{t^2}{s}-\frac{2t}{s^2}-\frac{2}{s^3}\right)e^{-2s}\Big/_0^2$$

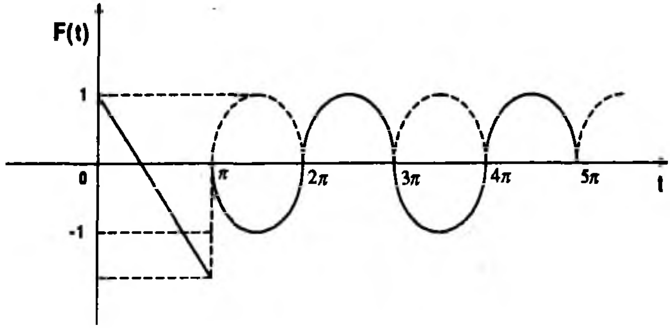
$$=\frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\left(-\frac{4}{s}-\frac{4}{s^2}-\frac{2}{s^3}\right)e^{-2s}-\left(0-0-\frac{2}{s^3}\right)\right]$$

$$\therefore L\{F(t)\}=\frac{2-2e^{-2s}-4s.e^{-2s}-4s^2e^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})}$$

4. Determinar la transformada de Laplace de la función F(t) definida por:

$$F(t)=\begin{cases}1-t & , t<\pi\\ |\text{sen}\, t| & , t>\pi\end{cases}$$

Solucion



La función $F(t) = |\text{sen}\, t|$, es periódica de periodo p = π

$$L\{F(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)dt = \int_0^{\pi} e^{-st} F(t)dt + \int_{\pi}^{+\infty} e^{-st} F(t)dt$$

$$= \int_0^{\pi} (1-t)e^{-st} dt + \int_{\pi}^{+\infty} e^{-st} |\text{sen}\, t| dt$$

$$= \int_0^{\pi} (1-t)e^{-st} dt + \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \int_0^{\pi} e^{-st}\, \text{sen}\, t\ dt - \int_0^{\pi} e^{-st}\, \text{sen}\, t\ dt$$

$$= \frac{e^{-\pi s}}{s^2}[s(\pi-1)+1] + \frac{s-1}{s^2} + \frac{1-e^{-\pi s}}{(1+s^2)(1-e^{-\pi s})} - \frac{e^{-\pi s}+1}{s^2+1}$$

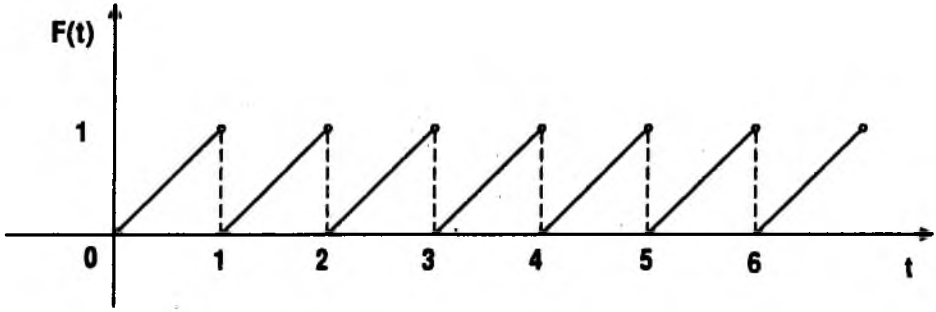
$$= \frac{e^{-\pi s}}{s^2}[s(\pi-1)+1] + \frac{s-1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{e^{-\pi s}+1}{s^2+1}$$

$$\therefore \quad L\{F(t)\} = \frac{e^{-\pi s}}{s^2}[s(\pi-1)+1] + \frac{s-1}{s^2} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

5) **Hallar** $L\{t - [\![t]\!]\}$

Solución

Graficando la función $F(t) = t - [\![t]\!]$



La función $F(t) = t - [\![t]\!]$ es periódica de periodo T = 1.

$$L\{F(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-Ts}} = \frac{\int_0^1 e^{-st}t\,dt}{1-e^{-s}} = \frac{1}{1-e^{-s}}(-\frac{t\,e^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}) \Big/_0^1$$

$$= \frac{1}{1-e^{-s}}[(-\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2}) - (0 - \frac{1}{s^2})]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-s}}(\frac{1}{s^2} - \frac{s+1}{s^2}e^{-s}) = \frac{1-(s+1)e^{-s}}{s^2(1-e^{-s})}$$

6) Hallar $L\{F(t)\}$ donde F(t) = |cos t - sen t|, es una función periódica de periodo T = π.

Solución

$$F(t) = |\cos t - \operatorname{sen} t| = \begin{cases} \cos t - \operatorname{sen} t \ , \ si \ 0 \le t \le \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{sen} t - \cos t \ , \ si \ \frac{\pi}{4} < t \le \pi \end{cases}$$

$$L\{F(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-Ts}} = \frac{\int_0^\pi e^{-st}|\cos t - \operatorname{sen} t|\,dt}{1-e^{-\pi s}}$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\pi s}}[\int_0^{\pi/4}|\cos t - \operatorname{sen} t|e^{-st}dt + \int_{\pi/4}^{\pi}|\cos t - \operatorname{sen} t|e^{-st}\,dt]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\pi s}}\left[\int_0^{\pi/4} e^{-st}(\cos t - \operatorname{sen} t)dt + \int_{\pi/4}^{\pi} e^{-st}(\operatorname{sen} t - \cos t)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\pi s}}\left[\frac{e^{-st}}{1+s^2}(\operatorname{sen} t - s.\cos t + s.\operatorname{sen} t + \cos t)\Big/_0^{\pi/4}\right.$$

$$\left.+\frac{e^{-st}}{1+s^2}(s.\cos t - \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t - \cos t)\Big/_{\pi/4}^{\pi}\right]$$

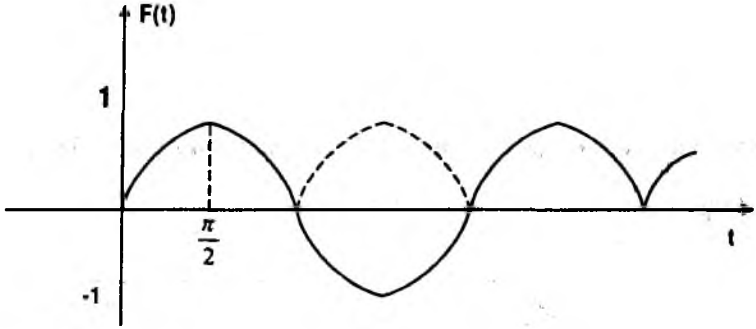
$$= \frac{1}{(1-e^{-\pi s})(1+s^2)}(2\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}s} + (s-1)(1-e^{-\pi s}))$$

$$\therefore \quad L\{F(t)\} = \frac{2\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}s} + (s-1)(1-e^{-\pi s})}{(1-e^{-\pi s})(1+s^2)}$$

7) Hallar $L\{F(t)\}$ donde $F(t) = |\operatorname{sen} t|$.

Solución

Graficando la función $F(t) = |\operatorname{sen} t|$.

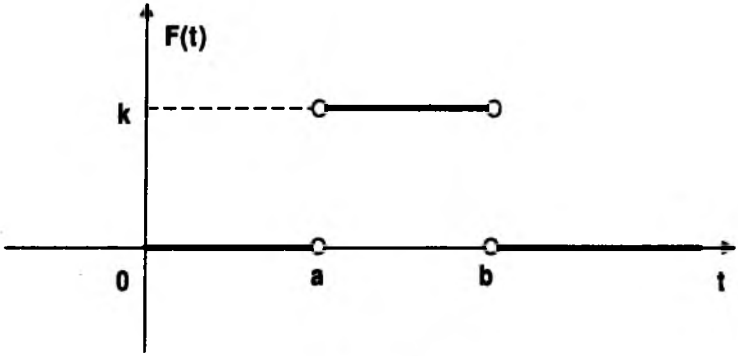


La función F(t) es periódica de periodo P = π, ahora aplicamos el teorema para calcular la transformada.

$$L\{|\operatorname{sen} t|\} = \frac{1}{1-e^{-\pi s}}\int_0^{\pi} e^{-st}\operatorname{sen} t\,dt = \frac{1+e^{-\pi s}}{(1-e^{-\pi s})(1+s^2)}$$

$$\therefore \quad L\{|\operatorname{sen} t|\} = \frac{1+e^{-\pi s}}{(1-e^{-\pi s})(1+s^2)}$$

8) Encontrar la Transformada de Laplace de la función que se muestra en la figura.



Solución

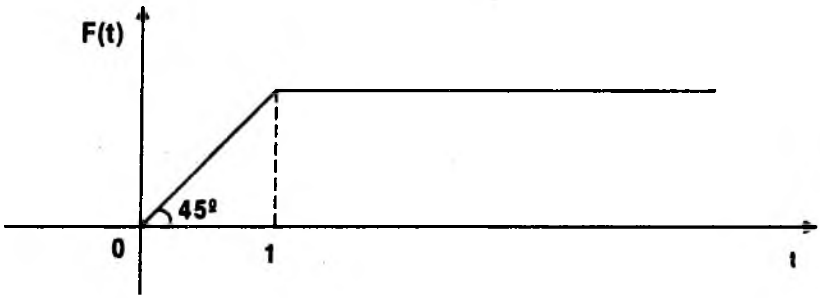
A la función F(t) expresaremos en términos de la función escalón unidad.

$F(t) = k(\mu_a(t) - \mu_b(t))$ son transformada de Laplace es:

$$L\{F(t)\} = k\ L\{\mu_a(t)\} - k\ L\{\mu_b(t)\} = \frac{k}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$$

$$\therefore \quad L\{F(t)\} = \frac{k}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$$

9) Hallar la transformada de Laplace de la función mostrada en la figura.



Solución

Definiendo la función F(t) se tiene:

$$F(t)=\begin{cases} t \;, & para \;\; 0<t\leq 1 \\ 1 \;, & para \;\; t>1 \end{cases}$$

$$L\{F(t)\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt=\int_0^1 t\,e^{-st}+\int_1^{+\infty} e^{-st}dt$$

$$=(-\frac{t\,e^{-st}}{s}-\frac{e^{-st}}{s^2})\Big/_0^1-\frac{e^{-st}}{s}\Big/_1^{\infty}$$

$$=(-\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-s}}{s^2})-(0-\frac{1}{s^2})-(0-\frac{e^{-s}}{s})=\frac{1-e^{-s}}{s^2}$$

$$\therefore \quad L\{F(t)\}=\frac{1-e^{-s}}{s^2}$$

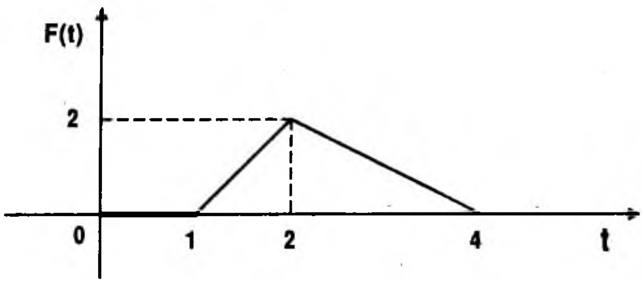
También la Transformada de Laplace de F(t) se calcula expresado a F(t) en términos de la función escalón unidad, es decir: $F(t) = t - (1 - t)\ \mu(t - 1)$

$$L\{F(t)\}=L\{t+(1-t)\mu(t-1)\}=L\{t\}+L\{\mu(t-1)\}-L\{t\ \mu(t-1)\}$$

$$=\frac{1}{s^2}+\frac{e^{-s}}{s}+\frac{d}{ds}L\{\mu(t-1)\}=\frac{1}{s^2}+\frac{e^{-s}}{s}+\frac{d}{ds}(\frac{e^{-s}}{s})=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s^2}$$

$$\therefore \quad L\{F(t)\}=\frac{1-e^{-s}}{s^2}$$

10) **Hallar la transformada de la figura**



<u>**Solución**</u>

Definiremos la función F(t)

Si $t \in [0,1> \Rightarrow F(t) = 0$

Si $t \in [1,2> \Rightarrow F(t) = 2t - 2$

Si $t \in [2,4> \Rightarrow F(t) = 4 - t$

Si $t \geq 4 \Rightarrow F(t) = 0$

, luego: $$F(t) = \begin{cases} 0 & , \ si \ t \in [0,1> \\ 2t-2 & , \ si \ t \in [1,2> \\ 4-t & , \ si \ t \in [2,4> \\ 0 & , \ si \ t \geq 4 \end{cases}$$

a la función F(t) expresaremos en términos de la función escalón unidad.

$$F(t) = 0 + (2t - 2 - 0)\ \mu(t - 1) + (4 - t - 2t + 2)\ \mu(t - 2) + (0 - 4 + t)\ \mu(t - 4)$$

$$F(t) = (2t - 2)\ \mu(t - 1) + (6 - 3t)\ \mu(t - 2) + (t - 4)\ \mu(t - 4)$$

$$F(t) = 2t\ \mu(t - 1) - 2\ \mu(t - 1) + 6\ \mu(t - 2) - 3t\ \mu(t - 2) + t\ \mu(t - 4) - 4\ \mu(t - 4)$$

$$L\{F(t)\} = -2\frac{d}{ds}L\{\mu(t-1)\} - 2L\{\mu(t-1)\} + 6L\{\mu(t-2)\} + 3\frac{d}{ds}L\{\mu(t-2)\}$$

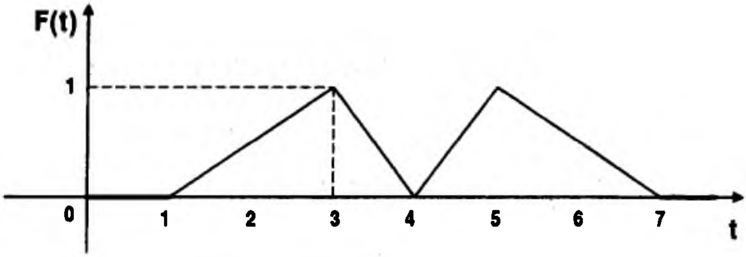
$$-\frac{d}{ds}L\{\mu(t-4)\} - 4L\{\mu(t-4)\}$$

$$= -2\frac{d}{ds}(\frac{e^{-s}}{s}) - \frac{2e^{-s}}{s} + 6\frac{e^{-2s}}{s} + 3\frac{d}{ds}(\frac{e^{-2s}}{s}) - \frac{d}{ds}(\frac{e^{-4s}}{s}) - 4\frac{e^{-4s}}{s}$$

$$= \frac{2e^{-s}}{s^2} - \frac{3e^{-2s}}{s^2} + \frac{e^{-4s}}{s^2}$$

$$\therefore \quad L\{F(t)\} = \frac{e^{-4s} - 3e^{-2s} + 2e^{-s}}{s^2}$$

11) Hallar la Transformada de la Laplace de la figura



Solución

Definiremos la función de acuerdo al gráfico

$$F(t)=\begin{cases} 0 & , \; si \; 0\le t<1 \\ \dfrac{t-1}{2} & , \; si \; 1\le t<3 \\ 4-t & , \; si \; 3\le t<4 \\ t-5 & , \; si \; 4\le t<5 \\ \dfrac{7-t}{2} & , \; si \; 5<t<7 \\ 0 & , \; si \; t\ge 7 \end{cases}$$

Ahora expresaremos a la función F(t) en términos de la función escalar unidad, que es la forma mas simplificada.

$$F(t)=0+(\frac{t-1}{2}-0)\,\mu(t-1)+(4-t-\frac{t-1}{2})\,\mu(t-3)+(t-5-4-t)\,\mu(t-4)$$

$$+(\frac{7-t}{2}-t+5)\,\mu(t-5)+(0-\frac{7-t}{2})\;\mu(t-7)$$

$$F(t)=\frac{t}{2}\,\mu(t-1)-\frac{\mu(t-1)}{2}+\frac{9}{2}\,\mu(t-3)-\frac{5}{2}\,t\,\mu(t-3)+2t\mu(t-4)-9\mu(t-4)$$

$$+\frac{17}{2}\,\mu(t-5)-\frac{3}{2}\,t\mu(t-5)-\frac{7}{2}\,\mu(t-7)+\frac{t}{2}\,\mu(t-7)$$

$$L\{F(t)\} = -\frac{d}{ds}L\{\mu(t-1)\} - \frac{e^{-s}}{2s} + \frac{9e^{-3s}}{2s} + \frac{5}{2}\frac{d}{ds}L\{\mu(t-3)\} - 2\frac{d}{ds}L\{\mu(t-4)\}$$

$$-\frac{9e^{-4s}}{s} + \frac{17}{2}\frac{e^{-5s}}{s} + \frac{3}{2}\frac{d}{ds}L\{\mu(t-5)\} - \frac{7}{2}.\frac{e^{-7s}}{s} - \frac{d}{ds}L\{\mu(t-7)\}$$

$$= -\frac{d}{ds}(\frac{e^{-s}}{s}) + \frac{9e^{-3s} - e^{-s} + 17e^{-5s} - 7e^{-7s}}{2s} + \frac{5}{2}\frac{d}{ds}(\frac{e^{-3s}}{s}) + 2\frac{d}{ds}(\frac{e^{-4s}}{s})$$

$$-\frac{3}{2}\frac{d}{ds}(\frac{e^{-5s}}{s}) + \frac{d}{ds}(\frac{e^{-7s}}{s})$$

$$= \frac{e^{-s}}{2s^2} - \frac{3e^{-3s}}{2s^2} + \frac{2e^{-4s}}{s^2} - \frac{3e^{-5s}}{s^2} + \frac{e^{-7s}}{s^2}$$

$$\therefore \quad L\{F(t)\} = \frac{e^{-s} - 3e^{-3s} + 4e^{-4s} - 6e^{-5s} + 2e^{-7s}}{2s^2}$$

12) Calcular $L\{|t-|t-2||\}$

Solución

Definiendo el valor absoluto en la función $F(t) = |t-|t-2||$

$$F(t) = \begin{cases} 2-t & , si \ t < 1 \\ 2t-2 & , si \ 1 \le t < 2 \\ 2 & , si \ t \ge 2 \end{cases}$$

a la función $F(t) = |t-|t-2||$, expresaremos en términos de la función escalón unidad.

F(t) = 2 - 2t + (4t + 4) μ(t - 1) + (4 - 2t) μ(t - 2)

L{F(t)} = L{2 - 2t + (4t - 4) μ(t - 1) - 2(t - 2) μ(t - 2)}

$$= \frac{2}{s} - \frac{2}{s^2} + 4e^{-s} L\{t\} - 2e^{-2s} L\{t\} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s^2} + \frac{4e^{-s}}{s^2} - \frac{2e^{-2s}}{s^2}$$

$$\therefore \quad L\{|t - |t-2||\} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s^2} + \frac{4e^{-s}}{s^2} - \frac{2e^{-2s}}{s^2}$$

13) Calcular $L\{3^t \mu_2^2(t)\}$

Solución

$$L\{3^t\} = L\{e^{t \ln 3}\} = \frac{1}{s - \ln 3}$$

también $\mu_{2(t)} = \mu_{(t-2)} = \begin{cases} 1 & , \ si \ t > 2 \\ 0 & , \ si \ t \leq 2 \end{cases}$

$$\mu_2^2(t) = \mu^2(t-2) = \begin{cases} 0 & , \ si \ t \leq 2 \\ 1 & , \ si \ t > 2 \end{cases}$$

$$L\{3^t \mu_2^2(t)\} = \frac{e^{-2(s-\ln 3)}}{s - \ln s}$$

14) Calcular $L\{t\, e^{-t} \operatorname{sen} 4t . \mu(e^t - 3)\}$

Solución

Analizando la función escalón se tiene:

$$\mu(e^t - 3) = \begin{cases} 0 & , \ si \ e^t - 3 < 0 \\ 1 & , \ si \ e^t - 3 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , \ si \ t < \ln 3 \\ 1 & , \ si \ t \geq \ln 3 \end{cases}$$

$$\mu(e^t - 3) = \begin{cases} 0 & , si \ t - \ln 3 < 0 \\ 1 & , si \ t - \ln 3 \geq 0 \end{cases} \qquad \ldots (1)$$

$$\mu(t - \ln 3) = \begin{cases} 0 & , si \ t - \ln 3 < 0 \\ 1 & , si \ t - \ln 3 \geq 0 \end{cases} \qquad \ldots (2)$$

Luego de (1) y (2) se tiene $\mu(e^t - 3) = \mu(t - \ln 3)$

Si $F(t) = t\,e^{-t}$ sen $4t.\mu(e^t - 3) = t\,e^{-t}$ sen $4t.\mu(t - \ln 3)$, entonces

$L\{t\,e^{-t}$ sen $4t.\mu(e^t - 3)\} = L\{t\,e^{-t}$ sen $4t.\mu(t - \ln 3)\}$

ahora mediante la propiedad de Transformada se tiene:

$$L\{\text{sen}\,4t.\mu(t - \ln 3)\} = e^{-s\ln 3} L\{\text{sen}(4t + 4\ln 3)\}$$

$$= e^{-s\ln 3} L\{\text{sen}\,4t.\cos 4\ln 3 + \cos 4t.\text{sen}\,4\ln 3\}$$

$$= e^{-s\ln 3} [\frac{4\cos 4\ln 3}{s^2 + 16} + \frac{\text{sen}(4\ln 3).s}{s^2 + 16}]$$

$$L\{t\,\text{sen}\,4t.\mu(t - \ln 3)\} = -\frac{d}{ds} L\{\text{sen}4\text{t}.\mu(\text{t} - \ln 3)\}$$

$$= -\frac{d}{ds}[e^{-s\ln 3}(\frac{4\cos 4\ln 3 + \text{sen}(4\ln 3)s}{s^2 + 16})]$$

$$= \frac{\ln 3.\text{sen}(4\ln 3)s + (4\ln 3.\cos 4\ln 3 + \text{sen}\,4\ln 3)s^2}{s^2 + 16} +$$

$$+ \frac{(8\cos 4\ln 3 - 16\,\text{sen}\,4\ln 3)s + 16(4\ln 3.\cos 4\ln 3 - \text{sen}\,4\ln 3)}{(s^2 + 16)^2}$$

15) Calcular $L\{t^2 e^{-t} \mu(|t^2 - 7| - 2)\}$

Solución

Analizando la función escalón se tiene:

$$\mu(|t^2-7|-2)=\begin{cases}0 & si \ \ |t^2-7|-2<0\\ 1 & si \ \ |t^2-7|-2\geq 0\end{cases}$$

si $|t^2-7|<2 \Rightarrow -2<t^2-7<2 \Rightarrow 5<t^2<9$

$$5<t^2<9 \Leftrightarrow 5<t^2 \wedge t^2<9$$

$$\Leftrightarrow (t<-\sqrt{5} \vee t>\sqrt{5}) \wedge -3<t<3$$
$$\Leftrightarrow -3<t<-\sqrt{5} \vee \sqrt{5}<t<3$$

si $|t^2-7|\geq 2 \Leftrightarrow t^2-7\geq 2 \vee t^2-7\leq -2$

$$\Leftrightarrow t^2\geq 9 \vee t^2\leq 5$$

$$\Leftrightarrow t\geq 3 \vee t\leq -3 \vee -\sqrt{5}\leq t\leq \sqrt{5}$$

Luego la Transformada de Laplace de $\mu(|t^2-7|-2)$ existe en $0\leq t\leq\sqrt{5}$, $\sqrt{5}<t<3$ y $t\geq 3$ entonces:

$$\mu(|t^2-7|-2)=\begin{cases}1 \ , & si \ \ 0\leq t\leq\sqrt{5}\\ 0 \ , & si \ \ \sqrt{5}<t<3\\ 1 \ , & si \ \ t\geq 3\end{cases}$$

$$L\{\mu(|t^2-7|-2)\}=\int_0^{\infty} e^{-st}\mu(|t^2-7|-2)dt$$

$$=\int_0^{\sqrt{5}} e^{-st}\mu(|t^2-7|-2)dt+\int_{\sqrt{5}}^{3} e^{-st}\mu(|t^2-7|-2)dt+\int_3^{\infty} e^{-st}\mu(|t^2-7|-2)dt$$

$$=\int_0^{\sqrt{5}} e^{-st}dt+0+\int_3^{\infty} e^{-st}dt=\frac{e^{-3s}}{s}-\frac{e^{-\sqrt{5}s}}{s}+\frac{1}{s}$$

$$L\{t^2\mu(|t^2-7|-2)\}=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}(\frac{e^{-3s}}{s}-\frac{e^{-\sqrt{5}s}}{s}+\frac{1}{s})$$

$$=\frac{d}{ds}(\frac{(\sqrt{5}s+1)e^{-\sqrt{5}s}-(3s+1)e^{-3s}+1}{s^2})$$

$$=\frac{9s^2e^{-3s}+((6-2\sqrt{5})s-5s^2)e^{-\sqrt{5}s}-2}{s^3}$$

$$L\{t^2e^{-t}\mu(|t^2-7|-2)dt\}=\frac{9(s+1)^2e^{-3(s+1)}+(6-2\sqrt{5})(s+1)-5(s+1)^2e^{-\sqrt{5}(s+1)}-2}{(s+1)^3}$$

16) Calcular $L\{t\pi^{-2t}\cos t.\operatorname{sen} t.\mu(t-4)\}$

Solución

Sea $F(t)=t\pi^{-2t}\cos t.\operatorname{sen} t.\mu(t-4)=\dfrac{t\pi^{-2t}}{2}\operatorname{sen} 2t.\mu(t-4)$

$$=\frac{t\,e^{-2\ln\pi.t}\operatorname{sen} 2t.\mu(t-4)}{2}$$

$$L\{F(t)\}=\frac{1}{2}L\{te^{-2\ln\pi.t}\operatorname{sen} 2t.\mu(t-4)\}$$

$$=\frac{e^{-4s}}{2}L\{(t+4)e^{-2\ln\pi(t+4)}\operatorname{sen} 2(t+4)\} \qquad \dots (1)$$

$$L\{(t+4)\operatorname{sen} 2(t+4)\}=L\{(t+4)(\operatorname{sen} 2t.\cos 8+\operatorname{sen} 8.\cos 2t)\}$$

$$=L\{4(\operatorname{sen} 2t.\cos 8+\operatorname{sen} 8.\cos 2t)\}+L\{t(\operatorname{sen} 2t.\cos 8+\operatorname{sen} 8.\cos 2t)\}$$

$$=\frac{8\cos 8+4s.\operatorname{sen} 8}{s^2+4}-\frac{d}{ds}L\{\cos 8.\operatorname{sen} 2t+\operatorname{sen} 8.\cos 2t\}$$

$$=\frac{8\cos 8+4s.\operatorname{sen} 8}{s^2+4}+\frac{4\cos 8.s+\operatorname{sen} 8.s^2-4\operatorname{sen} 8}{(s^2+4)^2} \qquad \dots (2)$$

$$L\{e^{-2\ln\pi t}(t+4)\operatorname{sen}2(t+4)\}=\frac{8\cos8+4\operatorname{sen}8(s+2\ln\pi)}{(s+2\ln\pi)^2+4}+$$

$$+\frac{4\cos8(s+2\ln\pi)+\operatorname{sen}8(s+2\ln\pi)^2-4\operatorname{sen}8}{(s+2\ln\pi)^2+4)^2} \quad \ldots \textbf{(3)}$$

reemplazando (3) en (1) se tiene:

$$L\{F(t)\}=\frac{e^{-4s-8\ln\pi}}{2}[\frac{8\cos8+4\operatorname{sen}8(s+2\ln\pi)}{(s+2\ln\pi)^2+4}+$$

$$+\frac{4\cos8(s+2\ln\pi)+\operatorname{sen}8(s+2\ln\pi)^2-4\operatorname{sen}8}{((s+2\ln\pi)^2+4)^2}]$$

17) Evaluar: $L\{\int_\mu^{2\mu}\frac{\cosh4\mu}{\pi\mu}\operatorname{sen}(\mu-\frac{\pi}{4})\cos(\mu-\frac{\pi}{4})\mu(\mu-\frac{\pi}{4})d\mu\}$

Solución

Sea $f(s)=L\{\int_\mu^{2\mu}\frac{\cosh4\mu}{\pi\mu}\operatorname{sen}(\mu-\frac{\pi}{4})\cos(\mu-\frac{\pi}{4})\mu(\mu-\frac{\pi}{4})d\mu\}$ ... **(1)**

$$\frac{\cosh4\mu}{\pi\mu}=e^{-\mu\ln\pi}(\frac{e^{4\mu}+e^{-4\mu}}{2})=\frac{e^{(4-\ln\pi)\mu}+e^{-(4+\ln\pi)\mu}}{2} \quad \ldots \textbf{(2)}$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$f(s)=\frac{1}{2}L\{\int_\mu^{2\mu}(\frac{e^{(4-\ln\pi)\mu}+e^{-(4+\ln\pi)\mu}}{2})\operatorname{sen}2(\mu-\frac{\pi}{4})\mu(\mu-\frac{\pi}{4})d\mu\}$$

$$=\frac{1}{4}[L\{\int_\mu^{2\mu}(e^{(4-\ln\pi)\mu}+e^{-(4+\ln\pi)\mu})\operatorname{sen}2(\mu-\frac{\pi}{4})\mu(\mu-\frac{\pi}{4})d\mu\}-$$

$$-L\{\int_0^u(e^{(4-\ln\pi)\mu}+e^{-(4+\ln\pi)\mu})\operatorname{sen}2(\mu-\frac{\pi}{4})\mu(\mu-\frac{\pi}{4})d\mu\}] \quad \ldots \textbf{(3)}$$

$$L\{\operatorname{sen}(\mu-\frac{\pi}{4})\cos(\mu-\frac{\pi}{4})\mu(\mu-\frac{\pi}{4})\}=e^{-\frac{\pi}{4}s}L\{\operatorname{sen}\mu.\cos\mu\}$$

$$=\frac{e^{-\frac{\pi}{4}s}}{2}L\{\operatorname{sen}2\mu\}=\frac{e^{-\frac{\pi}{4}s}}{s^2+4}$$

$$L\{(e^{(4-\ln\pi)\mu}+e^{-(4+\ln\pi)\mu})\operatorname{sen}(\mu-\frac{\pi}{4})\cos(\mu-\frac{\pi}{4})\mu(\mu-\frac{\pi}{4})\}=\frac{e^{-\frac{\pi}{4}(s-4+\ln\pi)}}{(s-4+\ln\pi)^2+4}+$$

$$+\frac{e^{-\frac{\pi}{4}(s+4+\ln\pi)}}{(s+4+\ln\pi)^2+4}$$

$$L\{\int_0^u(e^{(4-\ln\pi)\mu}+e^{-(4+\ln\pi)\mu})\operatorname{sen}2(\mu-\frac{\pi}{4})\mu(\mu-\frac{\pi}{4})d\mu\}=$$

$$=\frac{1}{s}[\frac{e^{-\frac{\pi}{4}(s-4+\ln\pi)}}{(s-4+\ln\pi)^2+4}+\frac{e^{-\frac{\pi}{4}(s+4+\ln\pi)}}{(s+4+\ln\pi)^2+4}]=g(s)\quad\ldots\ (4)$$

$$L\{\int_0^{2\mu}(e^{(4-\ln\pi)\mu}+e^{-(4+\ln\pi)\mu})\operatorname{sen}2(\mu-\frac{\pi}{4})\mu(\mu-\frac{\pi}{4})d\mu\}=\frac{1}{2}g(\frac{s}{2})$$

$$=\frac{1}{s}[\frac{e^{-\frac{\pi}{4}(\frac{s}{2}-4+\ln\pi)}}{(\frac{s}{2}-4+\ln\pi)^2+4}+\frac{e^{-\frac{\pi}{4}(\frac{s}{2}+4+\ln\pi)}}{(\frac{s}{2}+4+\ln\pi)^2+4}]\qquad\ldots\ (5)$$

ahora reemplazamos (5), (4) en (3)

$$f(s)=\frac{1}{2s}[\frac{e^{-\frac{\pi}{4}(\frac{s}{2}-4+\ln\pi)}}{(\frac{s}{2}-4+\ln\pi)^2+4}+\frac{e^{-\frac{\pi}{4}(\frac{s}{2}+4+\ln\pi)}}{(\frac{s}{2}+4+\ln\pi)^2+4}-$$

$$-(\frac{e^{-\frac{\pi}{4}(s-4+\ln\pi)}}{(s-4+\ln\pi)^2}+\frac{e^{-\frac{\pi}{4}(\frac{s}{2}+4+\ln\pi)}}{(s+4+\ln\pi)^2+4})]$$

18) Hallar $L\{\cos t.\ln t.\delta(t-\pi)\}$

Solución

Aplicando la propiedad de la función Delta de Dirac para cualquier función continua G(t), se tiene: $\int_0^{\infty}\delta(t-a).G(t)dt = G(a)$

$$L\{\cos t.\ln t.\delta(t-\pi)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\cos t.\ln t.\delta(t-\pi)dt = e^{-\pi s}\cos\pi\ln\pi = -e^{-\pi s}\ln\pi$$

19) Calcular $L\{\int_0^{-2t}(\int_0^{x}(\int_0^{2y-v}\frac{e^{-v}\operatorname{sen}^2(v-4)}{v-4}\mu(v^2-16)dy)dx\}$

Solución

Sea $F(y) = \int_0^{y}\frac{e^{-v}\operatorname{sen}^2(v-4)}{(v-4)^2}\mu(v^2-16)dv$

$$L\{F(y)\} = L\{\int_0^{y}\frac{e^{-v}\operatorname{sen}^2(v-4)\mu(v^2-16)dv}{(v-4)^2}\}$$

$$= \frac{1}{s}L\{\frac{e^{-v}\operatorname{sen}^2(v-4)\mu(v-4)}{(v-4)^2}\} \qquad \textbf{... (1)}$$

$$L\{\frac{\operatorname{sen}^2(v-4)\mu(v-4)}{(v-4)^2}\} = e^{-4s}L\{\frac{\operatorname{sen}^2 v}{v^2}\} = e^{-4s}(\frac{s}{4}\ln(\frac{s^2}{s^2+4})+\operatorname{arctg}(\frac{2}{s}))$$

$$L\{\frac{e^{-v}\operatorname{sen}^2(v-4)\mu(v-4)}{(v-4)^2}\} = e^{-4(s+1)}[\frac{s+1}{4}\ln(\frac{(s+1)^2}{(s+1)^2+4})+\operatorname{arctg}\frac{2}{s+1}] \qquad \textbf{... (2)}$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$L\{F(y)\} = \frac{e^{-4(s+1)}}{s}[\frac{s+1}{4}\ln(\frac{(s+1)^2}{(s+1)^2+4})+\operatorname{arctg}\frac{2}{s+1}] = H(s) \qquad \textbf{... (}\alpha\textbf{)}$$

como $L\{F(2y)\}=\frac{1}{2}H(\frac{s}{2})$

$$L\{\int_0^x F(2y)dy\}=\frac{1}{s}L\{F(2y)\}=\frac{1}{2s}H(\frac{s}{2})$$

$$L\{\int_0^{-2t}(\int_0^x F(2y)dy)dx\}=-L\{\int_0^{-2t}(\int_0^x F(2y)dy)dx\} \qquad \textbf{...(3)}$$

$$L\{\int_0^{t}(\int_0^x F(2y)dy)dx\}=\frac{1}{2s^2}H(\frac{s}{2})$$

$$L\{\int_0^{2t}(\int_0^x F(2y)dy)dx\}=\frac{2}{s^2}H(\frac{s}{4}) \qquad \textbf{...(4)}$$

de (α) se tiene:

$$H(s)=\frac{e^{-4(s+1)}}{s}[\frac{s+1}{4}\ln(\frac{(s+1)^2}{(s+1)^2+4})+\operatorname{arctg}\frac{2}{s+1}]$$

$$H(\frac{s}{4})=4\frac{e^{-(s+4)}}{s}[\frac{s+4}{16}\ln(\frac{(s+4)^2}{(s+4)^2+64})+\operatorname{arctg}\frac{8}{s+4}] \qquad \textbf{...(5)}$$

reemplazando (5) en (4) se tiene:

$$L\{\int_0^{2t}(\int_0^x F(2y)dy)dx\}=\frac{8}{s^3}e^{-(s+4)}[\frac{s+4}{16}\ln(\frac{(s+4)^2}{(s+4)^2+64})+\operatorname{arctg}\frac{8}{s+4}]$$

donde $F(2y)=\int_0^{2y}\frac{e^{-v^2}\operatorname{sen}^2(v-4)U(v^2-16)}{(v-4)^2}dv$

20) Probar que: $\int_0^{\infty}x^P e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{P+1}{2})$, $p>-1$

<u>**Solución**</u>

Sea $z = x^2 \Rightarrow dz = 2x\,dx \Rightarrow dx = \dfrac{dz}{2x} = \dfrac{dz}{2z^{1/2}}$

Si $x = 0$, $z = 0$ y si $x \to \infty$, $z \to \infty$

$$\int_0^{\infty} x^P e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} z^{\frac{P}{2}} e^{-z} . \frac{z^{-1/2}}{2} dz = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} z^{\frac{P}{2}-\frac{1}{2}} e^{-z} dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} z^{\frac{P+1}{2}-1} e^{-z} dz = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{p+1}{2})$$

$$\therefore \quad \int_0^{\infty} x^P e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{P+1}{2})$$

21) Probar que: $L\{\ln t\} = \dfrac{\Gamma'(1) - \ln s}{s}$

<u>Solución</u>

Se conoce que $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} \mu^{n-1} e^{-\mu} d\mu$, derivando con respecto a n

$$\Gamma'(n) = \int_0^{\infty} \mu^{n-1} e^{-\mu} \ln \mu\, d\mu \quad , \qquad \text{para } n = 1$$

$$\Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-u} \ln \mu\, d\mu \quad , \qquad \text{haciendo } \mu = st$$

$$\Gamma'(1) = s\int_0^{\infty} e^{-st}(\ln s + \ln t)dt = s\int_0^{\infty} e^{-st} \ln s\, dt + s\int_0^{\infty} e^{-st} \ln t\, dt$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \ln t\, dt = \frac{\Gamma'(1)}{s} - \int_0^{\infty} e^{-st} \ln s\, dt = \frac{\Gamma'(1)}{s} - (-\frac{e^{-st} \ln s}{s} \Big/_0^{\infty})$$

$$= \frac{\Gamma'(1)}{s} + (0 - \frac{\ln s}{s}) = \frac{\Gamma'(1)}{s} - \frac{\ln s}{s} = \frac{\Gamma'(1) - \ln s}{s}$$

$$\therefore \quad L\{\ln t\} = \frac{\Gamma'(1) - \ln s}{s}$$

22) Calcular $\int_0^{\infty} x^m e^{-ax^n} dx$, m, n, a > 0

Solución

Hacemos $\mu = ax^n \Rightarrow x^n = \frac{\mu}{a} \Rightarrow x = (\frac{\mu}{a})^{1/n}$

$$dx = \frac{1}{n}(\frac{\mu}{a})^{\frac{1}{n}-1}\frac{1}{a}d\mu$$

si x = 0 ; $\mu = 0$; si $x \to \infty$, $\Rightarrow \mu \to \infty$

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-ax^n} dx = \int_0^{\infty} (\frac{\mu}{a})^{\frac{m}{n}} e^{-\mu} \frac{1}{an}(\frac{\mu}{a})^{\frac{1}{n}-1} d\mu = (\frac{1}{a})^{\frac{m}{n}} \frac{1}{na}(\frac{1}{a})^{\frac{1}{n}-1} \int_0^{\infty} \mu^{\frac{m}{n}} \mu^{\frac{1}{n}-1} e^{-\mu} d\mu$$

$$= \frac{1}{na^{\frac{m}{n}+1+\frac{1}{n}-1}} \int_0^{\infty} \mu^{\frac{m+1}{n}-1} e^{-\mu} d\mu = \frac{1}{na^{\frac{m+1}{n}}} \Gamma(\frac{m+1}{n})$$

$$\therefore \quad \int_0^{\infty} x^m e^{-ax^n} dx = \frac{1}{na^{\frac{m+1}{n}}} \Gamma(\frac{m+1}{n})$$

23) Demostrar que: $\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$, $n \in z^+$, m > -1.

Solución

Sea $\ln x = -\mu \Rightarrow x = e^{-\mu} \Rightarrow dx = -e^{-\mu} d\mu$

Si $x \to 0$, $\Rightarrow \mu \to \infty$: si $x \to 1$, $\Rightarrow \mu \to 0$

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = \int_0^{\infty} e^{-m\mu}(-\mu)^n e^{-\mu}(-d\mu) = \int_0^{\infty} (-1)^n \mu^n e^{-(m+1)\mu} d\mu$$

Sea $(m+1)\mu = z \Rightarrow d\mu = \dfrac{dz}{m+1}$

$\mu = 0$, z = 0 , $\mu \to \infty$, z $\to \infty$

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = \int_0^\infty (-1)^n \mu^n e^{-(m+1)\mu} d\mu = (-1)^n \int_0^\infty \left(\frac{z}{m+1}\right)^n e^{-z} \frac{dz}{m+1}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_0^\infty e^{-z} z^n dz = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_0^\infty e^{-z} z^{(n+1)-1} dz$$

$$= \frac{(-1)^n \Gamma(n+1)}{(m+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n .n!}{(m+1)^{n+1}} \quad , \quad n \in z^+ \; , \; m > -1$$

24) Demostrar que: $L\{t^n\} = \dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$, n > -1 , s > 0

Solución

$L\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st} t^n dt$, por definición de Transformada.

Sea x = st , s > 0 $\Rightarrow t = \dfrac{x}{s}$

$$L\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st} t^n dt = \int_0^\infty e^{-x} \left(\frac{x}{s}\right)^n d\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty e^{-x} x^n dx = \frac{1}{s^{n+1}} \Gamma(n+1)$$

$$\therefore \quad L\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

25) Demostrar que: $L\{t^{-1/2}\} = \sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$

Solución

Se conoce que: $\quad L\{t^n\} = \dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$

$$L\{t^{-1/2}\} = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{s^{-\frac{1}{2}+1}} = \frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

$$\therefore \quad L\{t^{-1/2}\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

26) Si $s > 0$, $n > 1$, Demostrar que:

$$L\{\frac{t^{n+1}}{1-e^{-t}}\} = \Gamma(n)(\frac{1}{s^n} + \frac{1}{(s+1)^n} + \frac{1}{(s+2)^n} + \dots)$$

Solución

Se sabe que: $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$, para $|x| < 1$

$$\frac{1}{1-e^{-t}} = 1 + e^{-t} + e^{-2t} + e^{-3t} + \dots$$

$$\frac{t^{n-1}}{1-e^{-t}} = t^{n-1} + t^{n-1}e^{-t} + t^{n-1}e^{-2t} + t^{n-1}e^{-3t} + \dots$$

$$L\{\frac{t^{n-1}}{1-e^{-t}}\} = L\{t^{n-1} + t^{n-1}e^{-t} + t^{n-1}e^{-2t} + t^{n-1}e^{-3t} + \dots\}$$

$$= \frac{\Gamma(n)}{s^n} + \frac{\Gamma(n)}{(s+1)^n} + \frac{\Gamma(n)}{(s+2)^n} + \dots \quad = \Gamma(n)(\frac{1}{s^n} + \frac{1}{(s+1)^n} + \dots)$$

27) Hallar $L\{\dfrac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\}$

Solución

Por medio de $L\{F'(t)\} = sL\{F(t)\} - F(0^+)$, donde:

$$F(t) = \operatorname{sen}\sqrt{t} \Rightarrow F'(t) = \frac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}} \quad \text{y} \quad F(0^+) = 0$$

$$L\{\frac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}\} = s\,L\{\operatorname{sen}\sqrt{t}\} - 0, \text{ donde } \quad L\{\operatorname{sen}\sqrt{t}\} = \frac{\pi\, e^{-1/4s}}{2s^{3/2}}$$

$$\therefore \quad L\{\frac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}\} = \frac{s\sqrt{\pi}}{s^{3/2}} e^{-1/4s} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}\, e^{-1/4s}$$

28) Calcular $\int_0^1 \frac{x^{P-1}dx}{\sqrt{1-x^q}}$, $q > 0$, $\frac{p}{q} > 0$ y deducir el valor de $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$

Solución

Sea $1 - x^q = z \Rightarrow x^q = 1 - z \Rightarrow x = (1-z)^{1/q}$

$$dx = -\frac{1}{q}(1-z)^{\frac{1}{q}-1}dz, \text{ además } \quad x^{P-1} = (1-z)^{\frac{P-1}{q}}$$

Si $x = 0$, $z = 1$ y si $x = 1$, $z = 0$, entonces

$$\int_0^1 \frac{x^{P-1}}{\sqrt{1-x^q}} = -\frac{1}{q}\int_1^0 (1-z)^{\frac{P-1}{q}}.(1-z)^{\frac{1}{q}-1}\frac{dz}{z^{1/2}} = \frac{1}{q}\int_0^1 z^{-1/2}(1-z)^{\frac{P}{q}-1}dz$$

$$= \frac{1}{q}\int_0^1 z^{\frac{1}{2}-1}(1-z)^{\frac{P}{q}-1}dz = \frac{1}{q}B(\frac{1}{2},\frac{p}{q})$$

$$= \frac{1}{q}\left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{p}{q})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{p}{q})}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{q}\left(\frac{\Gamma(\frac{p}{q})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{p}{q})}\right)$$

para el caso $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$, se tiene p = 1, q = 4.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 \frac{x^{1-1}}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{1}{4}B(\frac{1}{2},\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})}) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{4})}{4\Gamma(\frac{3}{4})})$$

29) Evaluar $I_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt$

Solución

Sea $\mu = 1-t^2 \Rightarrow -2t\,dt = d\mu$

$$\mu = 1-t^2 \Rightarrow t = \sqrt{1-\mu} \Rightarrow dt = -\frac{d\mu}{2\sqrt{1-\mu}}$$

Si t = 0, μ = 1 y si t = 1, μ = 0.

$$I_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt = 2\int_0^1 (1-t^2)^n dt = 2\int_1^0 \mu^n (-\frac{d\mu}{2\sqrt{1-\mu}}) = \int_0^1 \mu^n (1-\mu)^{-1/2} d\mu$$

$$= \int_0^1 \mu^{(n+1)-1}(1-\mu)^{\frac{1}{2}-1} d\mu = B(n+1,\frac{1}{2})$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1+\frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}$$

$$I_n = \frac{\sqrt{\pi}.n!}{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})...\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{n!}{\frac{(2n+1)}{2}.\frac{(2n-1)}{2}...\frac{3}{2}.\frac{1}{2}} = \frac{2^{n+1}.n!}{(2n+1)(2n-1)...3.1}$$

30) Si $B(p,q)=\int_0^1 x^{P-1}(1-x)^{q-1}dx$, Demostrar que:

a) $B(p,q)=\int_1^{\infty} x^{-(P+q)}(x-1)^{q-1}dx$ **b)** $B(p,q)=\int_0^{\infty} x^{P-1}(1+x)^{-(p+q)}dx$

Solución

a) Sea $x=\frac{1}{z}$, cuando $x\to 0$; $z\to\infty$

cuando $x\to 1$; $z\to 1$

como $x=\frac{1}{z} \Rightarrow dx=-\frac{dz}{z^2}$

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{P-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_{\infty}^1 \frac{1}{z^{P-1}}(1-\frac{1}{z})^{q-1}(-\frac{dz}{z^2})$$

$$=\int_1^{\infty} z^{-(P+q)}(z-1)^{q-1}dz=\int_1^{\infty} x^{-(P+q)}(z-1)^{q-1}dz$$

$$\therefore\ B(p,q)=\int_1^{\infty} x^{-(P+q)}(x-1)^{q-1}dx$$

b) Sea $z=\frac{x}{1-x} \Rightarrow x=\frac{z}{z+1} \Rightarrow dx=\frac{dz}{(z+1)^2}$

cuando $x\to 0$; $z\to 0$ y cuando $x\to 1$, $z\to\infty$

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{P-1}(1-x)^{q-1}dx$$

$$=\int_0^{\infty}(\frac{z}{z+1})^{P-1}(1-\frac{z}{z+1})^{q-1}\frac{dz}{(z+1)^2}=\int_0^{\infty} z^{P-1}(1+z)^{-(P+q)}dz$$

$$=\int_0^{\infty} x^{P-1}(x+1)^{-(P+q)}dx$$

$$\therefore \quad B(p,q)=\int_0^{\infty} x^{P-1}(1+x)^{-(p+q)}dx$$

31) Demostrar que $\int_0^2 \mu(8-\mu^3)^{1/3}d\mu=\frac{16\sqrt{3}}{27}\pi$

Solución

$$\int_0^2 \mu(8-\mu^3)^{1/3}d\mu=2\int_0^2 \mu(1-(\frac{\mu}{2})^3)^{1/3}d\mu$$

Sea $x=(\frac{\mu}{2})^3 \Rightarrow x^{1/3}=\frac{\mu}{2} \Rightarrow d\mu=\frac{2}{3}x^{-2/3}dx$

para $\mu=0$; x = 0 , $\mu=2$, x = 1.

$$\int_0^2 \mu(8-\mu^3)^{1/3}d\mu=2\int_0^1 2x^{1/3}(1-x)^{1/3}\frac{2}{3}x^{-2/3}dx=\frac{8}{3}\int_0^1 x^{-1/3}(1-x)^{1/3}dx$$

como $B(m,n)=\int_0^1 \mu^{m-1}(1-\mu)^{n-1}d\mu$ entonces

$$\begin{cases} m-1=-\frac{1}{3} \\ n-1=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=\frac{2}{3} \\ n=\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\int_0^2 \mu(8-\mu^3)^{1/3}d\mu=\frac{8}{3}B(\frac{2}{3},\frac{4}{3})=\frac{8}{3}(\frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3}+\frac{4}{3})})$$

$$=\frac{8}{3}(\frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(2)})=\frac{8}{3}\Gamma(\frac{2}{3})\frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3})$$

$$=\frac{8}{9}\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(1-\frac{1}{3})=\frac{8}{9}(\frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}})=\frac{16\sqrt{3}\pi}{27}$$

$$\therefore \quad \int_0^2 \mu(8-\mu^3)^{1/3}d\mu=\frac{16\sqrt{3}\pi}{27}$$

32) Demostrar que: $\int_a^b (t-a)^p (b-t)^q \, dt = (b-a)^{p+q+1} B(p+1, q+1)$

donde p > -1 , q > -1 , b > a.

Solución

Sea t = μ + a $\Rightarrow$ -t = - μ - a $\Rightarrow$ b - t = b - μ - a

si t = a , μ = 0 ; t = b , μ = b - a.

$$\int_a^b (t-a)^p (b-t)^q \, dt = \int_a^{b-a} \mu^p (b-a-\mu)^q \, d\mu \quad \ldots (1)$$

Sea $x = \dfrac{\mu}{b-a} \Rightarrow \mu = (b-a)x \Rightarrow d\mu = (b-a)dx$

Si μ = 0 , x = 0 , si μ = b - a , x = 1

$$\int_a^b (t-a)^p (b-t)^q \, dt = \int_a^{b-a} \mu^p (b-a-\mu)^q \, d\mu$$

$$= \int_0^1 (b-a)^p x^p [(b-a)-(b-a)x]^q (b-a) dx$$

$$= \int_0^1 (b-a)^{p+1} x^p (b-a)^q (1-x)^q \, dx$$

$$= (b-a)^{p+q+1} \int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx$$

$$= (b-a)^{p+q+1} \int_0^1 x^{(p+1)-1} (1-x)^{(q+1)-1} \, dx$$

$$= (b-a)^{p+q+1} B(p+1, q+1)$$

33) Dado $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$, Demostrar que $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$

Solución

Hacemos $\frac{x}{1+x}=y \Rightarrow x=\frac{y}{1-y} \Rightarrow dx=\frac{dy}{(1-y)^2}$

Si $x\to 0$, $y\to 0$, y si $x\to\infty$, $y\to 1$

$$\frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}=\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\int_0^1\frac{(\frac{y}{1-y})^{p-1}}{1+\frac{y}{1-y}}.\frac{dy}{(1-y)^2}$$

$$=\int_0^1\frac{y^{p-1}(1-y)dy}{(1-y)^{p-1}(1-y)^2}=\int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{-p}dy$$

$$=\int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{(1-p)-1}dy=B(p,1-p)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(p+1-p)}=\Gamma(p)\Gamma(1-p)$$

$$\therefore\quad \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}=\Gamma(p)\Gamma(1-p)$$

34) Mostrar que: $\Gamma(\frac{1}{2}+p)\Gamma(\frac{1}{2}-p)=\frac{\pi}{\cos p\pi}$

Solución

Del ejercicio anterior $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$

$$\Gamma(\frac{1}{2}+p)\Gamma(\frac{1}{2}-p)=\Gamma(\frac{1}{2}+p)\Gamma(1-(\frac{1}{2}+p))=\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}+p)\pi}=\frac{\pi}{\cos p\pi}$$

$$\therefore\quad \Gamma(\frac{1}{2}+p)\Gamma(\frac{1}{2}-p)=\frac{\pi}{\cos p\pi}$$

35) Demostrar que: $\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx=\frac{\pi}{2\Gamma(p)\cos(\frac{p\pi}{2})}$, $0<p<1$

Solución

Expresaremos $\frac{1}{x^p}=\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p)x^{(p-1)+1}}=\frac{(p-1)!}{\Gamma(p)x^{(p-1)+1}}$

$$\frac{1}{x^p}=\frac{(p-1)!}{\Gamma(p)x^{(p-1)+1}}=\frac{1}{\Gamma(p)}L\{t^{p-1}\}=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty}e^{-tx}t^{p-1}dt$$

$$\frac{\cos x}{x^p}=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty}e^{-tx}t^{p-1}\cos x\,dx$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x\,dx}{x^p}=\int_0^{\infty}(\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty}e^{-tx}t^{p-1}\cos x\,dt)dx=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty}t^{p-1}(\int_0^{\infty}e^{-tx}\cos x\,dx)dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty}t^{p-1}L\{\cos x\}dt=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty}t^{p-1}\frac{t}{t^2+1}dt$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty}\frac{t^p}{1+t^2}dt$$

Haciendo $z=t^2 \Rightarrow t=z^{1/2} \Rightarrow dt=\frac{z^{-1/2}}{2}dz$

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty}\frac{z^{p/2}}{1+z}.\frac{z^{-1/2}}{2}dz=\frac{1}{2\Gamma(p)}\int_0^{\infty}\frac{z^{\frac{p+1}{2}-1}}{z+1}dz$$

$$=\frac{1}{2\Gamma(p)}.\frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{p+1}{2}\pi}=\frac{\pi}{2\Gamma(p)\cos\frac{p\pi}{2}}$$

por lo tanto $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\cos\frac{p\pi}{2}}$

36) Calcular $\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)\sqrt[15]{t^{14}(1-t)}}$

Solución

$$\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)\sqrt[15]{t^{14}(1-t)}} = \int_0^1 \frac{t^{-14/15}(1-t)^{-1/15}}{t+1} dt$$

Sea $u = \frac{1}{1+t} \Rightarrow t = \frac{1-u}{u} \Rightarrow dt = -\frac{du}{u^2}$

cuando t $\to$ 0 ; u$\to$ 1 ; t $\to$ 1 ; $u \to \frac{1}{2}$

$$\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)\sqrt[15]{t^{14}(1-t)}} = \int_1^{1/2} \frac{\left(\frac{1-u}{u}\right)^{-14/15}\left(1-\frac{1-u}{u}\right)^{-1/15}}{\frac{1-u}{u}+1}\left(-\frac{du}{u^2}\right)$$

$$= \int_{1/2}^1 (1-u)^{-14/15}(2u-1)^{-1/15} du$$

Sea $w = 2u-1 \Rightarrow u = \frac{w+1}{2} \Rightarrow du = \frac{dw}{2}$

cuando $u \to \frac{1}{2}$, w $\to$ 0 , u $\to$ 1 , w $\to$ 1

$$\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)\sqrt[15]{t^{14}(1-t)}} = \int_{1/2}^1 (1-u)^{-14/15}(2u-1)^{-1/15} du$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-w)^{-14/15} w^{-1/15} dw}{2^{-14/15}\, 2} = \frac{1}{2^{1/15}} \int_0^1 (1-w)^{\frac{1}{15}-1} w^{\frac{14}{15}-1} dw$$

$$= \frac{1}{2^{1/15}} B\left(\frac{1}{15}, \frac{14}{15}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{15})\Gamma(\frac{14}{15})}{2^{1/15}\Gamma(\frac{1}{15}+\frac{14}{15})}$$

$$= \frac{1}{2^{1/15}} \Gamma\left(\frac{1}{15}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{15}\right) = \frac{\pi}{2^{1/15}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{15})}$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)\sqrt[15]{t^{14}(1-t)}} = \frac{\pi}{2^{1/15}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{15})}$$

37) Calcular $\int_0^\infty \frac{t^{a-1}dt}{1+t^b}$, a > 0 , b > 0.

Solución

Hacemos $u = \frac{t^b}{1+t^b} \Rightarrow t^b = \frac{u}{1-u}$

$$t = \left(\frac{u}{1-u}\right)^{1/b} \Rightarrow dt = \frac{1}{b}\left(\frac{u}{1-u}\right)^{\frac{1}{b}-1} \frac{du}{(1-u)^2}$$

$$t^b = \frac{u}{1-u} \Rightarrow 1+t^b = 1-\frac{u}{1-u} = \frac{1}{1-u}$$

cuando t →0 , u → 0 y si t → ∞, u → 1

$$\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \int_0^1 \frac{\left(\frac{u}{1-u}\right)^{\frac{a-1}{b}}}{\frac{1}{1-u}} \cdot \frac{1}{b}\left(\frac{u}{1-u}\right)^{\frac{1}{b}-1} \frac{du}{(1-u)^2}$$

$$= \frac{1}{b}\int_0^1 \frac{u^{\frac{a-1}{b}}.u^{\frac{1}{b}-1}du}{(1-u)^{\frac{a-1}{b}}(1-u)^{\frac{1}{b}-1}(1-u)} = \frac{1}{b}\int_0^1 \frac{u^{\frac{a}{b}-1}du}{(1-u)^{\frac{a}{b}}}$$

$$= \frac{1}{b}\int_0^1 u^{\frac{a}{b}-1}.(1-u)^{(1-\frac{a}{b})-1}du = \frac{1}{b}B(\frac{a}{b},1-\frac{a}{b})$$

$$= \frac{1}{b}(\frac{\Gamma(\frac{a}{b})\Gamma(1-\frac{a}{b})}{\Gamma(\frac{a}{b}+1-\frac{a}{b})} = \frac{1}{b}\Gamma(\frac{a}{b})\Gamma(1-\frac{a}{b}) = \frac{\pi}{b\,\text{sen}(\frac{a\pi}{b})}$$

38) Demostrar que $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{n})}{n\Gamma(\frac{n+2}{2n})}$

Solución

Por definición $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}.(1-x)^{q-1}dx$

Sea $1-x^n = u \Rightarrow x^n = 1-u \Rightarrow x = (1-u)^{1/n}$

de donde $dx = -\frac{1}{n}(1-u)^{\frac{1}{n}-1}du$

Si x = 0, u = 1 y si x = 1, u = 0

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \int_1^0 \frac{-\frac{1}{n}(1-u)^{\frac{1}{n}-1}du}{u^{1/2}} = \frac{1}{n}\int_0^1 u^{-1/2}(1-u)^{\frac{1}{n}-1}du$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^1 u^{-1/2-1}(1-u)^{\frac{1}{n}-1}du = \frac{1}{n}B(\frac{1}{2},\frac{1}{n})$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{n})}{n\Gamma(\frac{n+2}{2n})}$$

39) Verificar que $\int_1^{\infty} \frac{(t-1)^p}{t^2} dt = \Gamma(1+p)\Gamma(1-p)$, $|p| < 1$

<u>**Solución**</u>

Sea u = t - 1 $\Rightarrow$ si t $\to$ 1 , u $\to$ 0 y si t $\to \infty$, u $\to \infty$, entonces

$$\int_1^{\infty} \frac{(t-1)^p}{t^2} dt = \int_0^{\infty} \frac{u^p du}{(u+1)^2} \qquad \text{... (1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sea } v = \frac{1}{1+u} \Rightarrow 1+u = \frac{1}{v} \Rightarrow du = -\frac{dv}{v^2} \\ \text{si } u \to 0 , v = 1 \ \ y \ \ si \ \ u \to \infty , v = 0 \end{array}\right\} \qquad \text{... (2)}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{(t-1)^p}{t^2} dt = \int_0^{\infty} \frac{u^p du}{(u+1)^2} = \int_1^0 \left(\frac{1-v}{v}\right)^p v^2 \left(-\frac{dv}{v^2}\right)$$

$$= \int_0^1 (1-v)^p v^{-p} dv = \int_0^1 v^{(1-p)-1} (1-v)^{(1+p)-1} dv$$

$$= B(1-p, 1+p) = \frac{\Gamma(1-p)\Gamma(1+p)}{\Gamma(1-p+1+p)} = \frac{\Gamma(1-p)\Gamma(1+p)}{\Gamma(2)}$$

$= \Gamma$ (1 - p) Γ (1 + p) donde $\Gamma(2) = 1$

$$\therefore \quad \int_1^{\infty} \frac{(t-1)^p}{t^2} dt = \Gamma(1+p)\Gamma(1-p) \quad , \quad |P| < 1$$

40) Calcular $\int_0^{\infty} t^a (1+t)^b dt$

Solución

Sea $t=\operatorname{tg}^2\theta \Rightarrow \theta=\operatorname{arctg}\sqrt{t} \Rightarrow d\theta=\dfrac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{1+t}}$

$dt=2\sqrt{t}(1+t)d\theta=2\operatorname{tg}\theta.\sec^2\theta\, d\theta$

Si $t\to 0$, $\Rightarrow \theta\to 0$; si $t\to\infty \Rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\infty} t^a(1+t)^b dt=\int_0^{\pi/2}\operatorname{tg}^{2a}\theta.(1+\operatorname{tg}^2\theta)^b 2\operatorname{tg}\vartheta.\sec^2\theta\, d\theta$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\operatorname{tg}^{2a}\theta.(1+\operatorname{tg}^2\theta)^b \operatorname{tg}\vartheta.\sec^2\theta\, d\theta$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\operatorname{tg}^{2a+1}\theta.\sec^{2b+2}\theta\, d\vartheta=2\int_0^{\pi/2}\frac{(\operatorname{sen}\theta)^{2a+1}d\theta}{(\cos\theta)^{2a+1}(\cos\theta)^{2b+2}}$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2a+1}\theta.\cos^{-2a-2b-3}\theta\, d\vartheta$$

$$=2\int_0^{\pi/2}(\operatorname{sen}\theta)^{2(a+1)-1}.(\cos\theta)^{2[-a-b-1]-1}d\vartheta$$

$$=2B(a+1,-a-b-1)=\frac{2\Gamma(a+1)\Gamma(-a-b-1)}{\Gamma(a+1-a-b-1)}$$

$$=\frac{2\Gamma(a+1)\Gamma(-a-b-1)}{\Gamma(-b)}$$

41) Calcular $L\{J_0(\sqrt{t})\}$

Solución

$$J_0(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}=1-\frac{t^2}{2^2}+\frac{t^4}{2^2.4^2}-\frac{t^6}{2^2.4^2.6^2}+\frac{t^8}{2^2.4^2.6^2.8^2}-\dots$$

$$J_0(\sqrt{t})=1-\frac{t}{2^2}+\frac{t^2}{2^2.4^2}-\frac{t^3}{2^2.4^2.6^2}+\frac{t^4}{2^2.4^2.6^2.8^2}-...$$

$$L\{J_0(\sqrt{t})\}=\frac{1}{s}[1-\frac{1}{1!}(\frac{1}{4s})+\frac{1}{2!}(\frac{1}{4s})^2-\frac{1}{3!}(\frac{1}{4s})^3+...]$$

$$=\frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\frac{1}{4s})^n}{n!}=\frac{e^{-s/4}}{s}\quad,\quad s>0$$

$$\therefore\quad L\{J_0(\sqrt{t})\}=\frac{e^{-s/4}}{s}\ ,\ s>0$$

42) Demostrar que: $L\{e^{-at}J_0(bt)\}=\dfrac{1}{\sqrt{s^2+2as+a^2+b^2}}$

<u>Solución</u>

$$J_0(bt)=1-\frac{b^2t^2}{2^2}+\frac{b^4t^4}{2^2.4^2}-\frac{b^6t^6}{2^2.4^2.6^2}+\frac{b^8t^8}{2^2.4^2.6^2.8^2}-...$$

$$L\{J_0(bt)\}=\frac{1}{s}-\frac{b^2}{2s^3}+\frac{1.3.b^4}{2.4.s^5}-\frac{1.3.5.b^6}{2.4.6.s^7}+\frac{1.3.5.7.b^8}{2.4.6.8.s^9}-...$$

$$=\frac{1}{s}[1-\frac{1}{2}(\frac{b}{s})^2+\frac{1.3}{2.4}(\frac{b}{s})^4-\frac{1.3.5}{2.4.6}(\frac{b}{s})^7+...]$$

$$=\frac{1}{s}.\frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{s^2}}}=\frac{1}{\sqrt{s^2+b^2}}$$

$$\therefore\quad L\{J_0(\sqrt{t})\}=\frac{1}{\sqrt{s^2+b^2}}$$

ahora aplicamos la propiedad de traslación

$$L\{e^{-at}J_0(bt)\} = \frac{1}{\sqrt{(s+a)^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{s^2+2as+a^2+b^2}}$$

43) Demostrar que: $L\{J_0(a\sqrt{t^2-b^2})\} = \dfrac{e^{-b\sqrt{s^2+a^2}}}{\sqrt{s^2+a^2}}$, t > b

Solución

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}(\frac{t}{2})^{2k} \quad \text{, por definición}$$

$$J_0(a\sqrt{t^2-b^2}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}(\frac{a\sqrt{t^2-b^2}}{2})^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}(t^2-b^2)^k(\frac{a}{2})^{2k}$$

$$(t^2-b^2)^k = t^{2k}-k(t^2)^{k-1}b^2+\frac{k(k-1)}{2!}(t^2)^{k-2}b^4-\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}(t^2)^{k-6}b^6+\ldots$$

$$L\{J_0(a\sqrt{t^2-b^2})\} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}(\frac{a}{2})^{2k}[\frac{(2k)!}{s^{2k+1}}-\frac{k(2k-2)!}{2^{2k-1}}b^2+$$

$$+\frac{k(k-1)(2k-4)b^4}{2!s^{2k-3}}-\ldots+\frac{b^{2n}}{s}]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}(\frac{a}{2})^{2k}[\frac{(k+1)(k+2)\ldots(2k)}{s^{2k+1}}-\frac{k(k+1)\ldots(2k)b^2}{2k(2k-1)s^{2k-1}}+$$

$$+\frac{k(k-1)(k+1)(k+2)\ldots(2k)b^4}{2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)2!s^{2k-3}}-\ldots+\frac{b^{2n}}{s}]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(b\sqrt{s^2+a^2})^k.\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b^k (\sqrt{s^2+a^2})^k}{k!} = \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}} e^{-b\sqrt{s^2+a^2}}$$

$$\therefore \quad L\{J_0(a\sqrt{t^2-b^2})\} = \frac{e^{-b\sqrt{s^2+a^2}}}{\sqrt{s^2+a^2}}$$

44) Calcular $L\{t\int_0^t J_0(a\sqrt{\mu})d\mu\}$

Solución

Sabemos que: $L\{J_0(\sqrt{t})\} = \dfrac{e^{-1/4s}}{s}$, s > 0

$$L\{\int_0^t J_0(a\sqrt{u})du\} = \frac{1}{s} L\{J_0(a\sqrt{u})\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{e^{-\frac{a^2}{4s}}}{s} = \frac{e^{-\frac{a^2}{4s}}}{s^2}$$

$$L\{t\int_0^t J_0(a\sqrt{u})du\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{-\frac{a^2}{4s}}}{s^2}\right) = \frac{(8s-a^2)e^{-\frac{a^2}{4s}}}{4s^4}$$

$$\therefore \quad L\{t\int_0^t J_0(a\sqrt{u})du\} = \frac{(8s-a^2)e^{-\frac{a^2}{4s}}}{4s^4}$$

45) Si $L\{F(u)\} = f(s)$, calcular $L\{\int_0^t J_0(2\sqrt{u(t-u)})F(u)\,du\}$

Solución

Como $J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(k!)^2} (\dfrac{t}{2})^{2k} \quad \Rightarrow \quad J_0(2\sqrt{u(t-u)}) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k (u(t-u))^k}{(k!)^2}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k u^k (t-u)^k}{(k!)^2}$$

$$J_0(2\sqrt{u(t-u)})F(u)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}u^k(t-u)^k F(u)$$

$$\int_0^t J_0(2\sqrt{u(t-u)})F(u)du=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\int_0^t u^k(t-u)^k F(u)du$$

$$L\{\int_0^t J_0(2\sqrt{u(t-u)})F(u)\,du\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}L\{\int_0^t u^k(t-u)^k F(u)du\}$$ por convolución

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}L\{t^k * t^k F(t)\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}[\frac{k!}{s^{k+1}}(-1)^k\frac{d^k}{ds^k}(f(s))]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}(\frac{k!}{s^{k+1}})f^{(k)}(s)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{(k!)^2}.\frac{f^{(k)}(s)}{s^{k+1}}$$

$$\therefore\quad L\{\int_0^t J_0(2\sqrt{u(t-u)})F(u)\,du\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(s)}{k!s^{k+1}}$$

46) Demostrar que $\int_0^{\infty}e^{-t}J_0(t)dt=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solución

Se conoce que: $L\{J_0(t)\}=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} J_0(t)dt = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$, tomando límite cuando s → 1 , tenemos

$$\lim_{s\to 1}\int_0^{\infty} e^{-st} J_0(t)dt = \lim_{s\to 1}\frac{1}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \quad \int_0^{\infty} e^{-t} J_0(t)dt = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

47) Probar que: $\int_0^{\infty} J_n(t)dt = 1$

Solución

Se conoce que: $L\{J_n(t)\} = \frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^n}{\sqrt{s^2+1}}$, ahora aplicamos la definición $L\{J_n(t)\}$

$$L\{J_n(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} J_n(t)dt = \frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^n}{\sqrt{s^2+1}}$$, tomando límite cuando s → 0

$$\lim_{s\to 0}\int_0^{\infty} e^{-st} J_n(t)dt = \lim_{s\to 0}\frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^n}{\sqrt{s^2+1}} = 1$$

$$\therefore \quad \int_0^{\infty} J_n(t)dt = 1$$

48) Calcular $\int_0^{\infty} t\, e^{-3t} J_0(4t)dt$

Solución

$$L\{J_0(4t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+16}} \Rightarrow L\{t\, J_0(4t)\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\sqrt{s^2+16}}\right)$$

de donde $L\{t\,J_0(4t)\}=\frac{s}{(s^2+16)^{3/2}}$, aplicamos la definición de transformada

$$\int_0^\infty e^{-st}t\,J_0(4t)dt=\frac{s}{(s^2+16)^{3/2}}, \text{ tomando límite cuando s} \to 3$$

$$\lim_{s\to 3}\int_0^\infty e^{-st}t\,J_0(4t)dt=\lim_{s\to 3}\frac{s}{(s^2+16)^{3/2}}=\frac{3}{125}$$

$$\therefore\ \int_0^\infty e^{-3t}t\,J_0(4t)dt=\frac{3}{125}$$

49) Demostrar que: $\int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\,\mu})\cos\mu\,d\mu=\operatorname{sen} t$

Solución

Sea $F(t)=\int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\,\mu})\cos\mu\,d\mu$, entonces se tiene:

$$L\{F(t)\}=L\{\int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\,\mu})\cos\mu\,d\mu\}=\int_0^\infty e^{-st}(\int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\,\mu})\cos\mu\,d\mu)dt$$

$$=\int_0^\infty \cos\mu(\int_0^\infty e^{-st}J_0(2\sqrt{t\,\mu})dt)d\mu$$

$$=\int_0^\infty \cos\mu\,L\{J_0(2\sqrt{t\,\mu})\}d\mu=\int_0^\infty \cos\mu.\frac{e^{-\mu/s}}{s}d\mu$$

$$=\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-u/s}\cos u\,du=\frac{1}{s}f(\frac{1}{s}), \text{ donde}$$

$$f(s)=L\{\cos t\}=\frac{s}{s^2+1}\ \Rightarrow\ f(\frac{1}{s})=\frac{s}{s^2+1}$$

$$L\{F(t)\}=\frac{1}{s}f(\frac{1}{s})=\frac{1}{s}(\frac{s}{s^2+1})=\frac{1}{s^2+1}=L\{\operatorname{sen} t\}$$

Luego $L\{F(t)\} = L\{\operatorname{sen} t\}$ entonces f(t) = sen t

$$\therefore \int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\,\mu})\cos\mu\,d\mu = \operatorname{sen} t$$

50) Demostrar que: $\int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\,\mu})\operatorname{sen}\mu\,d\mu = \cos t$

Solución

Sea $F(t) = \int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\,\mu})\operatorname{sen}\mu\,d\mu$, entonces se tiene:

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\,\mu})\operatorname{sen}\mu\,d\mu\right)dt = \int_0^\infty \operatorname{sen}\mu\left(\int_0^\infty e^{-st}J_0(2\sqrt{t\,\mu})dt\right)d\mu$$

$$= \int_0^\infty \operatorname{sen}\mu\, L\{J_0(2\sqrt{t\,\mu})\}d\mu = \int_0^\infty \operatorname{sen}\mu.\frac{e^{-\mu/s}}{s}$$

$$= \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-\mu/s}\operatorname{sen}\mu\,d\mu = \frac{1}{s}f\left(\frac{1}{s}\right) \qquad \ldots (1)$$

de donde $f(s) = L\{\operatorname{sen} t\} = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow f\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{s^2}{s^2+1}$

como $L\{F(t)\} = \frac{1}{s}f\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right) = \frac{s}{s^2+1} = L\{\cos t\}$

Luego $L\{F(t)\} = L\{\cos t\}$ entonces f(t) = cos t

$$\therefore \int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\,\mu})\operatorname{sen}\mu\,d\mu = \cos t$$

51) Demostrar que: $\int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\,\mu})J_0(\mu)d\mu = J_0(t)$

Solución

Se conoce que: $L\{J_0 a\sqrt{t})\} = \dfrac{e^{-\frac{a^2}{4s}}}{s}$

$$L\{J_0(2\sqrt{t\,\mu})\} = L\{J_0(2\sqrt{\mu}\sqrt{t})\} = \frac{e^{-\mu/s}}{s} \quad \text{donde} \quad a = 2\sqrt{\mu}$$

$$L\{\int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\,\mu})J_0(\mu)d\mu\} = \int_0^\infty e^{-st}(\int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\,\mu})J_0(\mu)d\mu)dt$$

$$= \int_0^\infty J_0(\mu)(\int_0^\infty e^{-st}J_0(2\sqrt{t\,\mu})dt)d\mu = \int_0^\infty J_0(\mu)\frac{e^{-\mu/s}}{s}d\mu$$

$$= \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-\mu/s}J_0(\mu)d\mu = \frac{1}{s}f(\frac{1}{s}), \text{ donde } f(s) = L\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

$$L\{\int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\,\mu})J_0(\mu)d\mu\} = \frac{1}{s}f(\frac{1}{s}) = \frac{1}{s}(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{s^2}+1}}) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} = L\{J_0(t)\}$$

$$\therefore \quad \int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\,\mu})J_0(\mu)d\mu = J_0(t)$$

52) Calcular $\int_0^\infty J_0(x^6)dx$, reduciendo el resultado a su mínima expresión.

<u>Solución</u>

Sea $F(t) = \int_0^\infty J_0(x^6 t)dx$, entonces su transformada es:

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}(\int_0^\infty J_0(x^6 t)dt)dx = \int_0^\infty (\int_0^\infty e^{-st}J_0(x^6 t)dt)dx$$

$$= \int_0^\infty L\{J_0(x^6 t)\}dx = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{s^2+x^{12}}}$$

hacemos $x^6 = s.\text{tg}\theta \Rightarrow 6x^5 dx = s.\sec^2\theta d\theta \quad \Rightarrow \quad dx = \dfrac{s.\sec^2\theta\, d\theta}{6x^5}$

$$x = (s.\text{tg}\theta)^{1/6} \Rightarrow x^5 = (s.\text{tg}\theta)^{5/6} \Rightarrow dx = \frac{s.\sec^2\theta\, d\theta}{6(s.\text{tg}\theta)^{5/6}}$$

cuando $x = 0 \Rightarrow \theta = 0$ y cuando $x \to +\infty$, $\Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$

ahora reemplazando en (1) se tiene:

$$L\{F(t)\} = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^{12}+s^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{s^2\,\text{tg}^2\theta + s^2}} \cdot \frac{s.\sec^2\theta\, d\theta}{6.s^{5/6}\,\text{tg}^{5/6}\theta}$$

$$= \frac{1}{6s^{5/6}} \int_0^{\pi/2} \frac{\sec\theta\, d\theta}{\text{tg}^{5/6}\theta} = \frac{1}{6s^{5/6}} \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{-5/6}\theta.\cos^{\frac{5}{6}-1} d\theta$$

$$= \frac{1}{6s^{5/6}} \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{\frac{1}{6}-1}\theta.\cos^{\frac{5}{6}-1} d\theta = \frac{1}{6s^{5/6}} \cdot \frac{1}{2} B(\frac{1}{12}, \frac{5}{12})$$

$$= \frac{1}{6s^{5/6}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{5}{12})}{2\Gamma(\frac{1}{12}+\frac{5}{12})} = \frac{1}{12s^{5/6}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{5}{12})}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{5}{12})}{12\sqrt{\pi}\, s^{5/6}}$$

$$\int_0^\infty J_0(x^6 t)dt = F(t) = \frac{\Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{5}{12})}{12\sqrt{\pi}} L^{-1}\{\frac{1}{s^{5/6}}\} \qquad \ldots (2)$$

como $L\{t^a\} = \dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$, $a > -1 \Rightarrow L^{-1}\{\dfrac{1}{s^{a+1}}\} = \dfrac{t^a}{\Gamma(a+1)}$

como $L^{-1}\{\dfrac{1}{s^{5/6}}\} = L^{-1}\{\dfrac{1}{s^{-\frac{1}{6}+1}}\} = \dfrac{t^{-1/6}}{\Gamma(-\frac{1}{6}+1)} = \dfrac{1}{\Gamma(\frac{5}{6})t^{1/6}}$

$$\Rightarrow \quad L^{-1}\{\frac{1}{s^{5/6}}\} = \frac{1}{\Gamma(\frac{5}{6})\sqrt[6]{t}} \qquad \ldots (3)$$

ahora reemplazando (3) en (2) se tiene:

$$\int_0^{\infty} J_0(x^6 t)dx = \frac{\Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{5}{12})}{12\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{5}{6})\sqrt[6]{t}}$$, tomando límite cuando $t \to 1$, se tiene:

$$\lim_{t\to 1}\int_0^{\infty} J_0(x^6 t)dx = \lim_{t\to 1}\frac{\Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{5}{12})}{12\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{5}{6})\sqrt[6]{t}}$$

$$\int_0^{\infty} J_0(x^6)dx = \frac{\Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{5}{12})}{12\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{5}{6})} \qquad \ldots (4)$$

además tenemos $2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2x)$, entonces

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}$$, por lo tanto se tiene:

$$\Gamma(\frac{5}{6}) = \Gamma(2(\frac{5}{6})) = \frac{2^{\frac{5}{6}-1}\Gamma(\frac{5}{12})\Gamma(\frac{11}{12})}{\sqrt{\pi}} = \frac{2^{-\frac{1}{6}}\Gamma(\frac{5}{12})\Gamma(\frac{11}{12})}{\sqrt{\pi}}$$

$$\Gamma(\frac{5}{6}) = \frac{2^{-\frac{1}{6}}\Gamma(\frac{5}{12})\Gamma(\frac{11}{12})}{\sqrt{\pi}} \qquad \ldots (5)$$

reemplazando (5) en (4) se tiene:

$$\int_0^{\infty} J_0(x^6)dx = \frac{\Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{5}{12})}{\dfrac{12\sqrt{\pi}\,2^{-1/6}\Gamma(\frac{5}{12})\Gamma(\frac{11}{12})}{\sqrt{\pi}}} = \frac{2^{1/6}\Gamma(\frac{1}{12})}{12\Gamma(\frac{11}{12})}$$

$$= \frac{2^{1/6}[\Gamma(\frac{1}{12})]^2}{12\Gamma(\frac{1}{12})\Gamma(\frac{11}{12})} \qquad \ldots (6)$$

pero $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$, entonces

$$\Gamma(\frac{11}{12})\Gamma(\frac{1}{12}) = \Gamma(\frac{11}{12})\Gamma(1-\frac{11}{12}) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{12}} \qquad \ldots (7)$$

reemplazando (7) en (6) se tiene:

$$\int_0^{\infty} J_0(x^6)dx = \frac{\dfrac{2^{1/6}(\Gamma(\frac{1}{12}))^2}{\pi}}{12\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{12}} = \frac{\sqrt[6]{2}(\Gamma(\frac{11}{12}))^2}{12\pi\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{12}}$$

53) Demostrar que: $J_{\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen} t$

Solución

$$J_n(t) = \frac{t^n}{2^n\Gamma(n+1)}(1-\frac{t^2}{2(2n+2)}+\frac{t^4}{2.4(2n+2)(2n+4)}\ldots)$$

$$J_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}+1)}(1-\frac{t^2}{2.3}+\frac{t^4}{2.3.4.5}\ldots)$$

$$J_{\frac{1}{2}}(t)=\frac{t^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}(1-\frac{t^2}{2.3}+\frac{t^4}{2.3.4.5}...)$$

$$J_{\frac{1}{2}}(t)=\frac{\sqrt{2}\,t}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{t}}(1-\frac{t^2}{2.3}+\frac{t^4}{2.3.4.5}...)$$

$$J_{\frac{1}{2}}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi\,t}}(t-\frac{t^3}{2.3}+\frac{t^5}{2.4.3.5}...)$$

$$\therefore J_{\frac{1}{2}}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\operatorname{sen} t$$

54) Demostrar que: $\frac{d}{dx}J_0(x)=-J_1(x)$

Solución

$$J_p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)}(\frac{x}{2})^{2k+p}\text{ , por definición}$$

$$J_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1)}(\frac{x}{2})^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}(\frac{x}{2})^{2k}$$

$$\frac{dJ_0(x)}{dx}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k(-1)^k}{(k!)^2}(\frac{x}{2})^{2k-1}.\frac{1}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(-1)^k}{(k!)^2}(\frac{x}{2})^{2k-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(-1)^{k+1}}{((k+1)!)^2}(\frac{x}{2})^{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+2)!}(\frac{x}{2})^{2k+1}=-J_1(x)$$

$$\therefore \quad \frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x)$$

55) Demostrar que: $\frac{d}{dx}(x^p J_p(x)) = x^p J_{p-1}(x)$

Solución

Se conoce que: $\Gamma(k + p + 1) = (k + p)\,\Gamma(k + p)$

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}$$, multiplicando por x^p

$$x^p J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)}\left(\frac{x^{2k+2p}}{2^{2k+p}}\right)$$

$$\frac{d(x^p J_p(x))}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(k+p)x^{2k+2p-1}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+p+1)2^{2k+p}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2(k+p+1)x^{2k+2p+1}}{\Gamma(k+2)\Gamma(k+p+2)2^{2k+p+2}}$$

$$= x^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+p+1}}{\Gamma(k+2)\Gamma(k+p+2)2^{2k+p+1}}$$

$$= x^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\Gamma(k+2)\Gamma(k+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p+1} = x^p J_{p-1}(x)$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(x^p J_p(x)) = x^p J_{p-1}(x)$$

2.12 Ejercicios Propuestos.

1) Sea $F(t) = \begin{cases} 3t, & 0 < t < 2 \\ 6, & 2 < t < 4 \end{cases}$, donde F(t) tiene periodo 4.

a) Hacer la gráfica de F(t) **b)** Hallar L{F(t)}

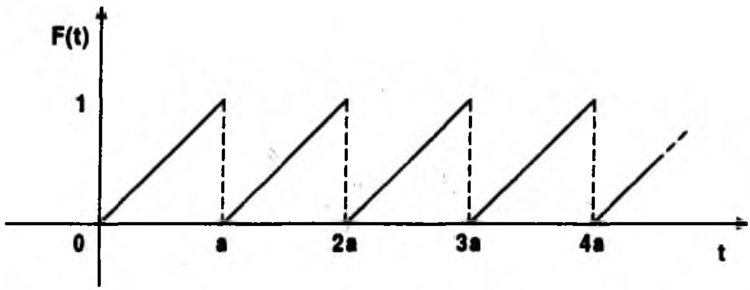
Rpta. $L\{F(t)\} = \dfrac{3 - 3e^{-2s} - 6s\,e^{-4s}}{s^2(1 - e^{-4s})}$

2) Hallar L{F(t)}, donde $F(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases}$ y $F(t + 2) = F(t)$, para $t > 0$.

Rpta. $L\{F(t)\} = \dfrac{1 - e^{-s}(s+1)}{s^2(1 - e^{-2s})}$

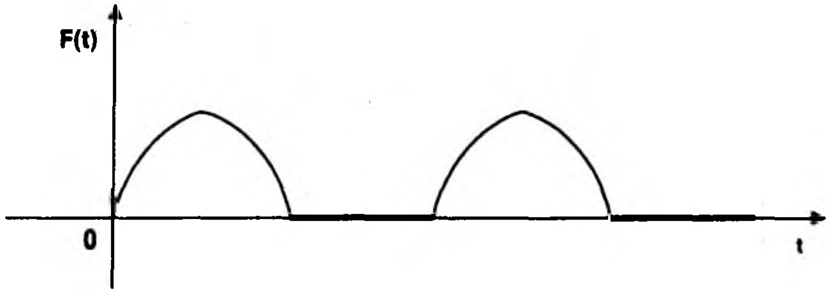
3) Demostrar que la transformada de Laplace de la función F(t) que se muestra en la figura diente de sierra es.

$$L\{F(t)\} = \frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s(1 - e^{-as})}$$

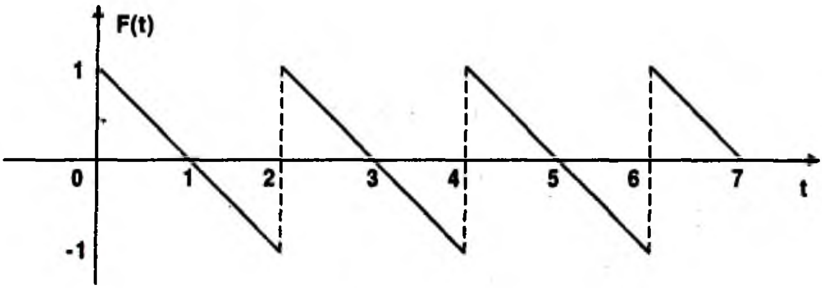


4) Suponga que F(t) es la rectificación de semionda sen kt, que se muestra en la .figura. Demostrar que:

$$L\{F(t)\} = \frac{1}{(s^2 + k^2)(1 - e^{-\frac{\pi}{k}})}$$

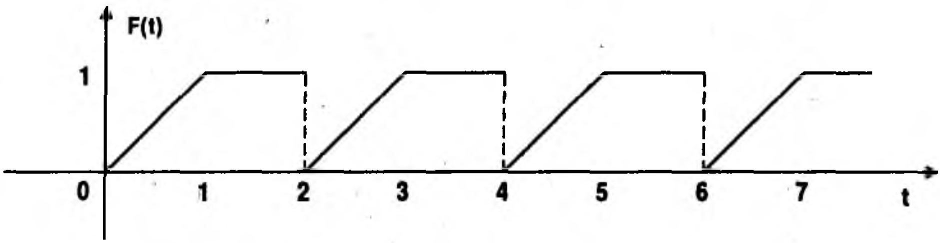


5) Hallar L{F(t)} donde F(t) se muestra en la figura.



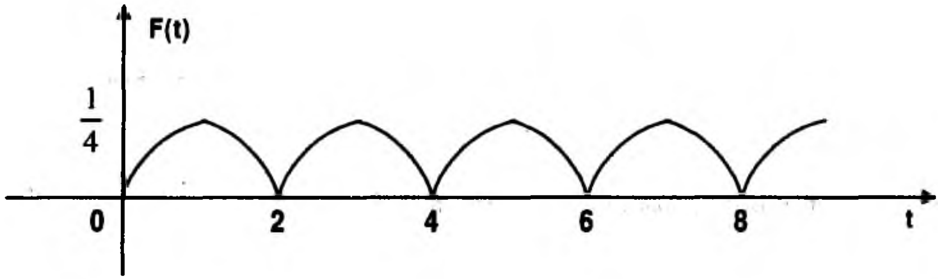
Rpta. $L\{F(t)\}=\dfrac{(s+1)e^{-2s}+s-1}{s^2(1-e^{-2s})}$

6) Hallar L{F(t)}, donde F(t) se muestra en la figura.

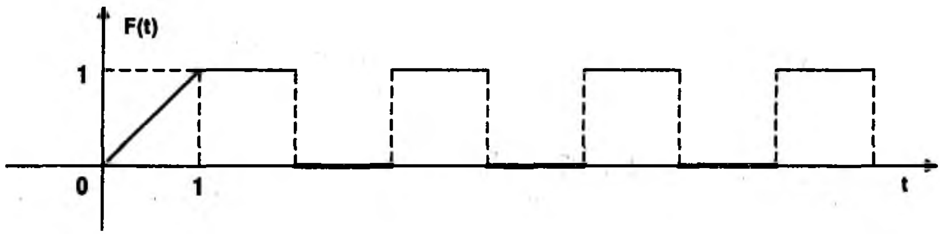


Rpta. $L\{F(t)\}=\dfrac{1-e^{-s}-se^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})}$

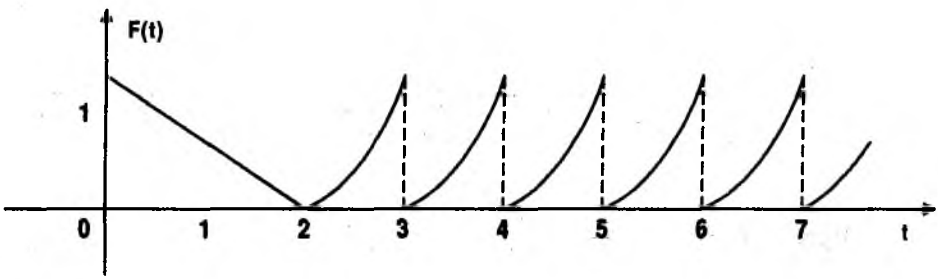
7) Calcular la transformada de Laplace de F(t) tal que F(t + 2) = F(t), donde F(t) es el pulso parabólico del gráfico.



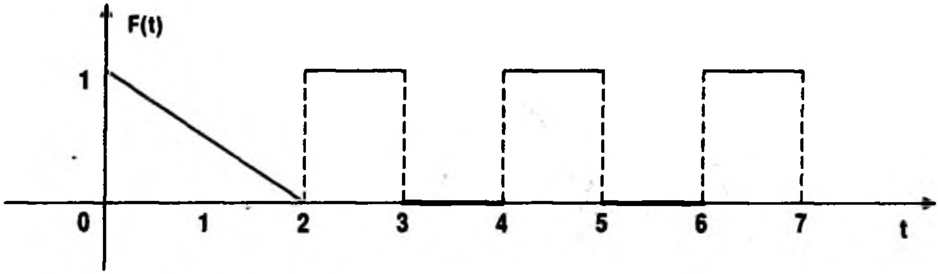
8) Hallar L{F(t)} donde F(t) es dado en el gráfico.



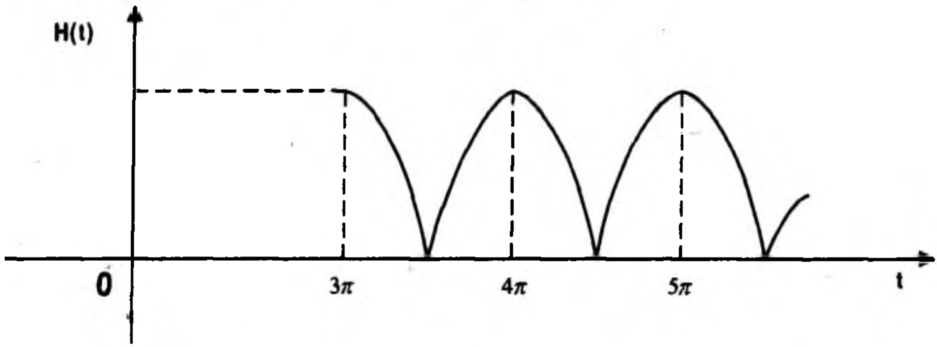
9) Hallar L{F(t)} donde F(t) es dado en el gráfico.



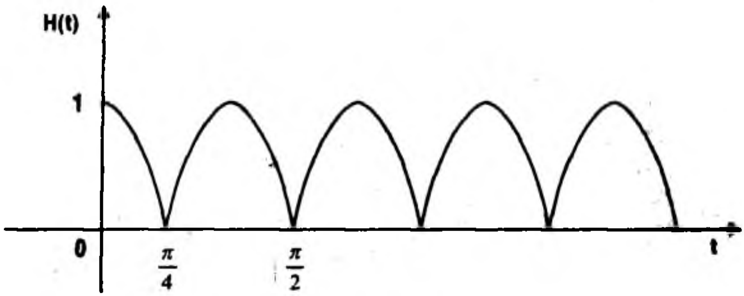
10) Hallar L{F(t)} donde F(t) es dado en el gráfico.



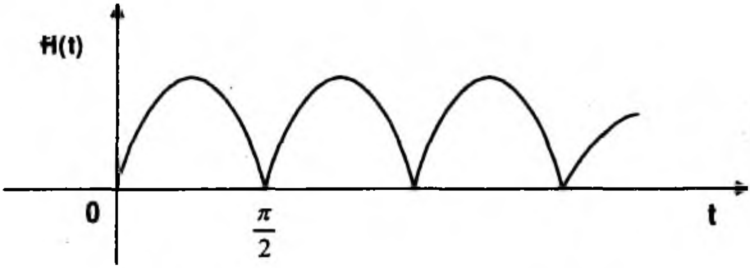
11) Si H(t) esta dado por el gráfico, calcular L{H(t)}.



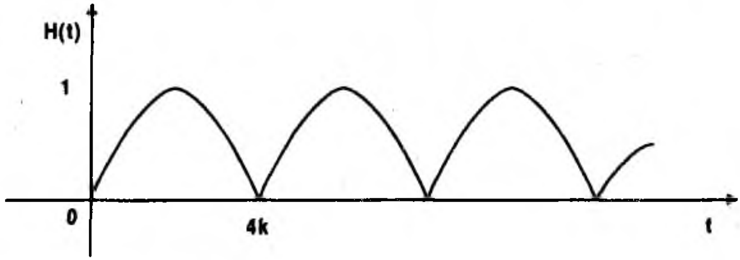
12) Evaluar $L\{\frac{H(t)}{(1-e^{-4t})^4}\}$, donde H(t) es la función que esta dado por el gráfico adjunto.



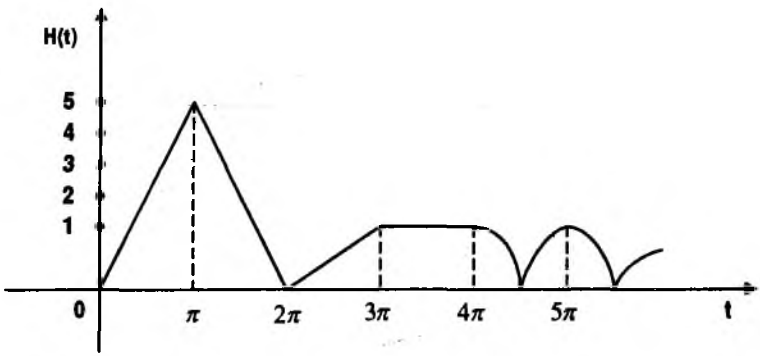
13) H(t) esta dado por el gráfico adjunto, calcular L{2 cosh 4t.H(t)}.



14) Calcular $L\{\frac{e^{6t}H(t)}{(1-e^{-4t})^4}\}$, donde H(t) esta dado por el gráfico adjunto.

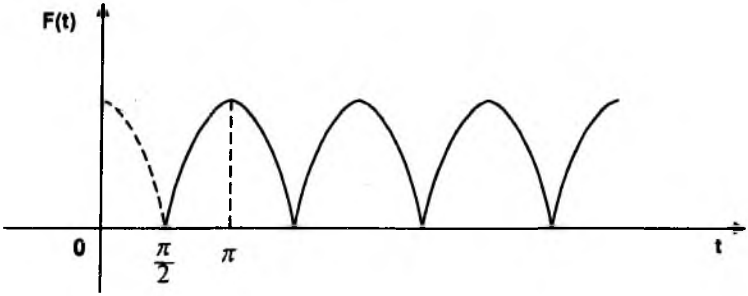


15) Hallar L{F(t)}, donde H(t) esta dado por el gráfico adjunto.

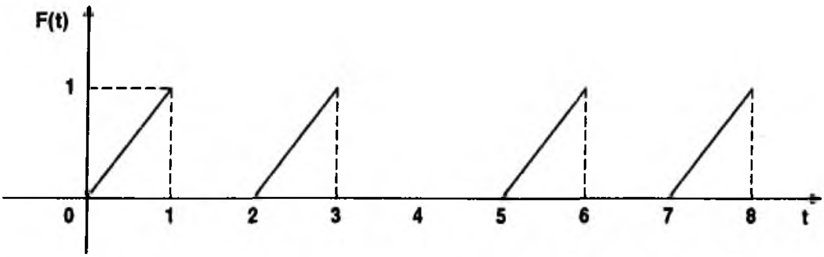


16) Si F(t) esta dado por el gráfico adjunto probar que

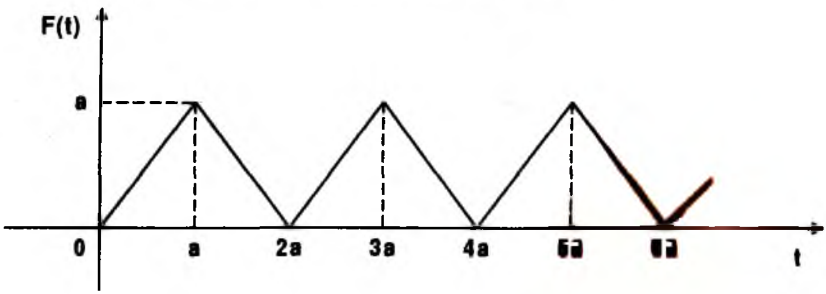
$$L\{F(t)\}=\frac{1}{1+s^2}[s+\frac{1}{\operatorname{senh}(\frac{\pi s}{2})}]$$



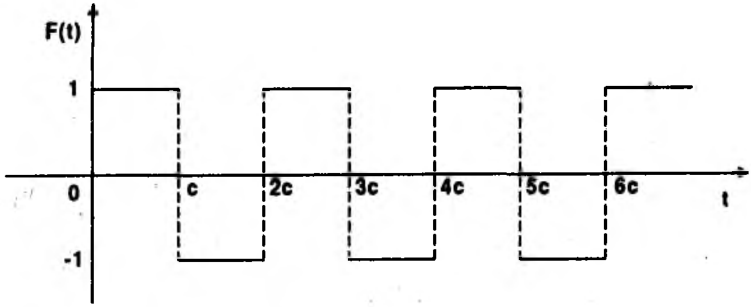
17) Hallar L{F(t)}, donde F(t) esta descrita por el gráfico.



18) Hallar L{F(t)} donde F(t) se muestra en la figura.



19) Encontrar la transformada de Laplace de la función onda cuadrada, mostrada en la figura.



Rpta. $L\{F(t)\} = \frac{1}{s}\operatorname{tgh}(\frac{cs}{2})$

20) Considera la función F definida por $F(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 2-t, & 1 \le t < 2 \end{cases}$, F(t + 2) = F(t)

graficar F(t) y calcular L{F(t)}.

21) Expresar F(t) en términos de la función escalón unidad y obtener L{F(t)}.

a) $F(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 1 \\ 4, & t > 1 \end{cases}$ **Rpta.** $f(s) = \frac{2}{s^3} + e^{-s}(\frac{3}{s} - \frac{2}{s^2} - \frac{2}{s^3})$

b) $F(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 2 \\ 4, & 2 \le t \le 4 \\ 0, & t > 4 \end{cases}$ **Rpta.** $f(s) = \frac{2}{s^3} - e^{-2s}(\frac{4}{s^2} + \frac{2}{s^3}) - \frac{4e^{-4s}}{s}$

c) $F(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 2 \\ t-1, & 2 < t < 3 \\ 0, & t > 3 \end{cases}$ **Rpta.** $f(s) = \frac{2}{s^3} - e^{-2s}(\frac{3}{s} + \frac{3}{s^2} + \frac{2}{s^3}) + e^{-3s}(\frac{5}{s} + \frac{1}{s^2})$

d) $F(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 2 \\ 4t, & t > 2 \end{cases}$ **Rpta.** f(s)

22) Expresar en términos de la función escalón unidad, las siguientes funciones y hallar su transformada.

a) $F(t)=\begin{cases} t^2, & 0<t<2 \\ 4t, & t>2 \end{cases}$ **b)** $F(t)=\begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0<t<\pi \\ \operatorname{sen} 2t, & \pi \le t \le 2\pi \\ \operatorname{sen} 3t, & t>2\pi \end{cases}$

23) Determinar la transformada de Laplace de la función F(t).

a) $F(t)=\begin{cases} 1-t, & t\le \pi \\ |\operatorname{sen} t|, & t>\pi \end{cases}$ **b)** $F(t)=\begin{cases} t^2, & t<\dfrac{\pi}{2} \\ |\cos t|, & t>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

24) Hallar L{H(t)} donde $H(t)=\begin{cases} 2, & 0\le t\le 3\pi \\ |\cos t|, & t>3\pi \end{cases}$

25) Calcular $L\{t\,2^{-t}\operatorname{sen} 3t.\mu(t-2)\}$.

26) Evaluar $L\{t\,\pi^{-t}\operatorname{sen} t.\cos t.\mu(t-4)\}$

27) Calcular $L\{\dfrac{e^t-e^{-t}}{2^t}\operatorname{sen}(t-\dfrac{\pi}{2}).\mu(t-\dfrac{\pi}{2})\}$

28) Evaluar $L\{\dfrac{e^{2t}-e^{-2t}}{3^t}\operatorname{sen}(t-\dfrac{\pi}{4}).\mu(t-\dfrac{\pi}{4})\}$

29) Hallar $L\{\big|t-|t-1|\big|\}$

30) Hallar L{F(t)} si $F(t)=\begin{cases} 1, & t\le 3\pi \\ |\operatorname{sen} 2t|, & t>3\pi \end{cases}$

31) Calcular $L\{U(t^3-6t^2+11t+6)\}$ y graficar la función.

32) Calcular $L\{\text{sen}(t-\pi)\}$ 33) Calcular $L\{|t^3-2t^2-t|\}$

34) Calcular $L\{t\,\text{sen}[\![|t-9|]\!]\mu(e^t-1)\}$

35) Calcular $L\{t\,e^{-5t}\int_t^{6t} e^{x+5t}\mu(|x-1|-1)dx\}$

36) Calcular $L\{\int_{-10t}^{0} e^{-4t+u}\mu(u^2-1)du\}$

37) Calcular $L\{\int_{-10t}^{0} e^{-3t+u}\mu(|t-3|-2)dt\}$

38) Calcular $L\{\mu(\text{sen}\, t)\}$ 39) Calcular $L\{\int_{-t}^{0} t\,e^{-10t+u}\mu(u^3-1)du\}$

40) Calcular $L\{\frac{e^{-5t}}{4^t}\mu(|t-1|-1)\}$

41) Calcular $L\{\frac{e^{4t}+e^{3t}}{5^t}\text{sen}\,t.\cos(t-\pi)\mu(t-\frac{\pi}{2})\}$

42) Calcular $L\{t^n\mu(t-2)\}$

43) Calcular $L\{\int_0^{4t}\frac{e^{-5t}\,\text{sen}^2(u-2)\mu(u^2-4)}{(u-2)^2}du\}$

44) Calcular $L\{\frac{\text{sen}(t-2\pi)}{t-2\pi}\mu(t-2\pi)\}$ **Rpta.** $f(s)=e^{-2\pi s}\,\text{arctg}\frac{1}{s}$

45) Calcular $L\{t^2e^{at}\mu(t-a)\}$ **Rpta.** $f(s)=\frac{e^{a(2a-s)}}{(s+2)^3}(s^2+4as+4a^2-2)$

46) Calcular $L\{\int_0^{t-a}\frac{e^x-e^{-x}}{x}\mu(t-a)dx\}$ **Rpta.** $f(s)=\frac{e^{-as}}{s}\ln\left|\frac{s+1}{s-1}\right|$, $s>1$

47) Calcular la transformada de Laplace.
$L\{7^t \cos t.(t-\pi).\mu(t-2\pi).\mu(t-7\pi)\}$

Rpta. $f(s) = -e^{-7\pi s}.7^{7\pi}(\dfrac{s-\ln 7}{(s-\ln 7)^2+1})$

48) Calcular $L\{\dfrac{t\cos t}{3^{2t}}\mu(t)\}$ **Rpta.** $f(s) = \dfrac{(s+\ln 9)^2-1}{((s+\ln 9)^2+1)^2}$

49) Calcular $L\{\cos|\pi-t|\}$ **Rpta.** $f(s) = -\dfrac{s}{s^2+1}$

50) Calcular $L\{\text{sen}|\pi-t|\}$ **Rpta.** $f(s) = \dfrac{1-2e^{-\pi s}}{s^2+1}$

51) Calcular $L\{|t^2-1|\}$

52) Hallar $L\{|a-t\mu(t-a)|\}$ donde "a" es una constante positiva.

Rpta. $f(s) = \dfrac{a}{s}+\dfrac{e^{-as}}{s^2}-\dfrac{ae^{-as}}{s}$

53) Hallar $L\{t-|t-a|\}$ **Rpta.** $f(s) = \dfrac{2}{s^2}-\dfrac{a}{s}-\dfrac{2e^{-as}}{s^2}$

54) Calcular $L\{|t^2-4t\mu(t-2)|\}$ **Rpta.** $f(s) = \dfrac{2}{s^3}(1-2e^{-2s}+2e^{-4s})$

55) Calcular la transformada de Laplace: $L\{t.e^{-bt}\int_t^{bt} e^{u+3t}\mu(|x-1|-1)dx\}$

Rpta. $f(s) = \dfrac{2e^{u-1}}{(s+3)^3}(se^{-\frac{7s}{3}-5}+9e^{-s/3}+4e^{-s-2s})$

56) Calcular $L\{\dfrac{e^{2t}+e^{-2t}}{4^t}\text{sen}(t-\dfrac{\pi}{4})\cos(t-\dfrac{\pi}{4})\mu(t-\dfrac{\pi}{4})\}$

57) Calcular $L\{t^2 2^{-t} \operatorname{sen} t.\cos t.\mu(t-\frac{\pi}{3})\}$

58) Calcular $L\{\left|4-\left|t^2-1\right|\right|\}$

59) Calcular $L\{\operatorname{sen} t.\mu(e^{5t}-4)\}$

60) Calcular $L\{\frac{e^{-4(t-\pi)}\cos(t-\pi)}{(1-e^{-6(t-\pi)})4}\mu(t^2-\pi^2)\}$

61) Evaluar si existe $L\{\frac{d}{dt}(\int_0^t t\, e^{4t}\left|v^2-1\right|dv)\}$ sin derivar.

62) Evaluar si existe $L\{\int_{-12t}^{0} e^{-5t-v}\cos v.\mu(v^2-1)dv\}$

63) Evaluar $L\{\int_0^t t\, e^{4t}\left|u^2-1\right|du\}$

64) Evaluar $L\{t^2\int_0^{4t}(v-4)^n \ln\left|v-4\right|\mu(v-4)dv\}$

65) Evaluar $L\{\int_0^t dv\int_0^v F(u)du\}$ si F(t) = H(s)

66) Evaluar $L\{t^n \ln\left|t\right|\}$

67) Evaluar $L\{\mu(t^3-2t^2+t)\}$

68) Evaluar $L\{e^{2t}t^n \ln\left|t\right|\}$

69) Calcular la t... sformada de las funciones.

a) $F(t)=1+[\![\,|t-1|\,]\!]$

b) $G(t)=(-1)^{[\![\,|t|\,]\!]}$

70) Evaluar $L\{\quad \cos^3(v-1)\mu(v^3-1)dv\}$, donde μ es la función escalón unitario.

71) Sea n > -1, n real, calcular $L\{t\,e^{-2t}\int_0^t u^n \ln|u|du\}$

72) Si L{F(t)} = f(s), calcular $L\{\frac{F(t)}{t^2}\}$

73) Calcular $L\{t^2 e^{-5t}\mu(t^2-1)\}$

74) Calcular $L\{t\,e^{-5t}\int_t^{6t} e^{x+5t}\mu(|x-1|-1)dx\}$

75) Calcular $L\{\sqrt{t}\cos t^{3/2}\}$

76) Evaluar la integral $L\{\text{sen}^6(t-1)\mu(t^2-1)\}$

77) Calcular $L\{\frac{1}{a}\int_0^t e^{\frac{b}{a}t}F(t/a)dt\}$, a > 0

78) Evaluar $L\{t^2 e^{-4t}\left|4-|t^2-1|\right|\}$ 79) Calcular $L\{t\,\text{tgh}(t)\mu(t-1)\}$

80) Si $F(t)=(t-1)^n\mu(t-1)$, calcular L{F(t)}

Rpta. $f(s)=\begin{cases}\dfrac{e^{-s}\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}, & n>-1,\ s>0\\[2mm] \dfrac{e^{-s}n!}{s^{n+1}}, & n\in z_0^+,\ s>0\end{cases}$

81) Demostrar que: $L\{t^k\ \text{tgh}\,t\}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{\Gamma(k+1)}{(s+2n)^{k+1}}-\frac{\Gamma(k+1)}{(s+2n+2)^{k+1}}\right]$

82) Calcular $L\{\frac{e^{-5t}t^k}{(1+e^{-6t})^2}\}$, ∀ k.

Rpta. $f(s)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1+n)\frac{\Gamma(k+1)}{(6n+5+s)^{k+1}} & , \ si \ \ k>-1\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1+n)\frac{k!}{(6n+5+s)^{k+1}} & , \ si \ \ k\in z_0^+\end{cases}$

83) Calcular $L\{t\,e^{6t}\operatorname{senh}\sqrt{t}\}$ **Rpta.** $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}.\frac{\Gamma(n+\frac{5}{2})}{(s-6)^{n+\frac{5}{2}}}$

84) Demostrar que:

$$L\{t^n\}=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} & , \ si \ n>-1, \ n\in R\\ \dfrac{n!}{s^{n+1}} & , \ si \ n\in z_0^+\end{cases}$$

85) Calcular $L\{t^{n/2}J_n(a\sqrt{t})\}$ **Rpta.** $(\frac{a}{2})^n\frac{e^{-a^2/4s}}{s^{n+1}}$, $s>0$

86) Demostrar que: $L\{J_0(t)\operatorname{sen}t\}=\dfrac{1}{\sqrt{s}\sqrt[4]{s^2+4}}\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\frac{2}{s}))$

87) Demostrar que: $L\{J_0(t)\cos t\}=\dfrac{1}{\sqrt{s}\sqrt[4]{s^2+4}}\cos(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\frac{2}{s}))$

88) Calcular. $L\{e^{-20t}J_0(t-4)\operatorname{sen}(t-4)U(t-4)\}$

89) Evaluar $L\{J_0(t)\cos t.\cosh t\}$

90) Sea L{F(t)} = H(s), probar que:

$$L\{t^{n/2}\int_0^{\infty}u^{-n/2}J_n(2\sqrt{ut})F(u)du\}=\frac{H(1/s)}{s^{n+1}}$$

91) Calcular $L\{t\,e^{-t}\int_t^{2t} J_0(u)\,\text{sen}\,u.du\}$

92) Si $H(t) = e^{3t} J_0(4t)$. Calcular $L\{H_{(t)}^{(4)}\}$

93) Hallar $L\{t\,J_0(\lambda t)\}$. **Rpta.** $\dfrac{s}{(s^2+\lambda^2)^{3/2}}$

94) Demostrar que: $L\{J_0(a\sqrt{t(t+2c)})\} = \dfrac{e^{c(s-\sqrt{s^2+a^2})}}{(s^2+a^2)^{1/2}}$

95) Evaluar $L\{\int_0^t t\,6^t J_0(5(t-4)\mu(t-4)dt\}$

96) Evaluar $L\{t\,e^{-10t} J_0(t)\cos t\}$

97) Evaluar $L\{\int_0^t \int_0^t J_0(2\sqrt{u(t-u)})F(u)du\,dv\}$ si L{F(t)} = H(s)

98) Calcular $L\{J_1(t)\}$, $L\{J_2(t)\}$, $L\{J_n(t)\}$

99) Calcular $L\{\int_{-t}^0 e^{-20t} J_0(u)\,\text{sen}\,u\,du\}$, si existe.

100) Demostrar que: $L\{I_e(t)\} = L\{\int_t^\infty \dfrac{e^{-u}}{u}du\} = \dfrac{\ln(s+1)}{2}$

101) Demostrar que: $L\{I_c(t)\} = L\{\int_t^\infty \dfrac{\cos u}{u}du\} = \dfrac{\ln(s^2+1)}{2s}$

102) Demostrar que: $\int_t^\infty e^{-t}(1-J_0(t))dt = \ln(1+\sqrt{2})$

103) Demostrar que:

a) $\int_0^{\infty} J_0(t)dt = 1$ **b)** $\int_0^{\infty} e^{-t} J_0(t)dt = \frac{\sqrt{2}}{2}$

104) Calcular $\int_0^{\infty} t\,e^{-3t} J_0(4t)dt$ **Rpta.** $\frac{3}{125}$

105) Probar que $\int_0^{\infty} J_0(at)\cos bt\,dt = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}$, cuando 0 < b < a, y tiene valor cero cuando b > a.

106) Demostrar que: $\int_0^{\infty} J_0(\lambda t)dt = \frac{1}{\lambda}$

107) Calcular **a)** $\int_0^{\infty} t\,J_0(\lambda t)dt$ **b)** $\int_0^{\infty} t\,J_1(\lambda t)dt$

Rpta. **a)** 0 **b)** $\frac{1}{\lambda^2}$

108) Calcular $\int_0^{\infty} J_0(u)J_1(t-u)du$ **Rpta.** $J_0(t) - \cos t$

109) Calcular $\int_0^{\infty} u\,e^{u^2} J_0(au)du$ **Rpta.** $\frac{e^{-a^2/4}}{2}$

110) Demostrar que: $\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}$

111) Calcular las integrales siguientes.

a) $\int_0^{\infty} \operatorname{sen} t^3 dt$ **b)** $\int_0^{\infty} \cos t^3 dt$

Rpta. **a)** $\frac{\Gamma(1/3)}{6}$

112) Demostrar que: $\Gamma(n) = 2\int_0^{\infty} x^{2n-1} e^{-x^2} dx$

113) Probar que: $\int_0^{\infty} \frac{u \operatorname{sen} u}{1+u^2} du = \frac{\pi}{2} e^{-at}$

114) Demostrar que: $\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$, $n \in z^+$, $m > -1$

115) Demostrar que: $\int_0^{\infty} J_0(x^2) dx = \frac{[\Gamma(1/4)]^2}{4\pi}$

116) Calcular $\int_0^{\infty} \frac{t^u F(u)}{\Gamma(u+1)} du$, u $\in$ R, u > -1 si L{F(u)} = H(s)

117) Calcular la transformada de Laplace

$$L\{t\, e^{-t} \int_t^{2t} J_0(u-4) \operatorname{sen}(u-4) U(u^2-16) du\}$$

118) Calcular la integral $\int_0^{\infty} t^m e^{-at^n} dt$, m,n > 0, a > 0.

Rpta. $\dfrac{\Gamma(\frac{m+1}{n})}{n a^{\frac{m+1}{n}}}$

119) Calcular $\int_0^1 t^n (\ln t)^n dt$, $n \in z^+$, m > -1 **Rpta.** $\dfrac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$

120) Calcular $\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{3-\cos t}}$ **Rpta.** $\dfrac{1}{2\sqrt{2}} B(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

121) Demostrar que: $\int_0^{\infty} \frac{y^2 dy}{1+y^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

122) Calcular $\int_0^a (a^4 - x^4)^{-1/6} dx$ **Rpta.** $\dfrac{\sqrt{\pi}\Gamma(1/4)}{4a\Gamma(3/4)}$

123) Calcular $\int_0^1 \dfrac{dt}{(t+1)(t^2(1-t))^{1/3}}$ **Rpta.** $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$

124) Calcular $\int_0^1 \dfrac{dt}{(t+1)^3 \sqrt[3]{t^2}(1-t)}$ **Rpta.** $\dfrac{\pi\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}$

125) Expresar $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx$, mediante la función gamma.

126) Calcular las siguientes integrales.

a) $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^a}}$, $a > 0$

b) $\int_0^a x^{2n}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, $a > 0$

c) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^{2n-1} x\, dx$, $0 < n < 1$

d) $\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1} dx$, $n,m > 0$

127) Mostrar que:

a) $\int_0^\infty y^3 e^{-2y^2} dy = \dfrac{3}{8}$

b) $\int_0^\infty y^2 e^{-2y^2} dy = \dfrac{\sqrt{\pi}}{8\sqrt{2}}$

c) $\int_0^\infty e^{-3x} x^{3/2} dx = \dfrac{\sqrt{3\pi}}{36}$

128) Calcular las siguientes integrales

a) $\int_0^\infty \dfrac{dx}{x^a(1+x)}$, $0 < a < 1$

b) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx$

Rpta. a) $\dfrac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}$ b) $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$

129) Demostrar que si $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$, $I_2 = \int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}$ entonces $I_1 . I_2 = \frac{\pi}{4}$

130) Calcular $\int_0^7 [(7-t)(t-3)]^{1/10} dt$

131) Calcular los integrales siguientes

a) $\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ **b)** $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt[3]{x}} dx$

c) $\int_0^{\infty} (x+1)^2 e^{-x^2} dx$ **d)** $\int_0^{\infty} \frac{x^c}{c^x} dx \quad sug. c^x = e^{x\ln c}$

Rpta. **a)** $\Gamma(1/2)$ **b)** 2

c) $\frac{1}{3} + \Gamma(\frac{5}{3}) + \Gamma(\frac{4}{3})$ **d)** $\frac{\Gamma(c+1)}{(Lnc)^{c+1}}$

132) Si $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $t > 0$, $G(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} & , 0 < t < 1 \\ 0 & , t < 1 \end{cases}$. Demostrar que:

$$F(t) * G(t) = \pi - 2\,\text{arctg}\,(\sqrt{t-1})\,\mu(t-1)$$

133) Calcular $\int_0^{\infty} \frac{tdt}{1+t^6}$ **Rpta.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

134) Demostrar que: $\int_0^{\infty} x \cos x^3 dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}\Gamma(1/3)}$

135) Calcular $I_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt$ **Rpta.** $\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}$

136) Calcular $\int_0^{\pi/2} \frac{(\operatorname{sen}\theta)^{2m-1}(\cos\theta)^{2n-1}d\theta}{(a\operatorname{sen}^2\theta + b\cos^2\theta)^{m+n}}$ $m,n > 0$

Rpta. $\frac{\beta(n,m)}{2a^n b^m}$

137) Demostrar que: $\int_0^{\infty} \frac{t^{m-1}+t^{n-1}}{(1+t)^{m+n}}dt = 2\beta(m,n), m,n > 0$

138) Calcular $\int_0^1 \frac{\mu^{n-1}(1-\mu)^{m-1}}{(\mu+r)^{m+n}}d\mu, si\ \ m,n > 0$

Rpta. $\frac{\beta(n,m)}{r^m(1+r)^n}$

139) Calcular $\int_0^1 \frac{\mu^{m-1}(1-\mu)^{n-1}}{(a+c\mu)^{m+n}}d\mu, si\ \ m,n > 0$

Rpta. $\frac{\beta(n,m)}{a^m c^n (1+\frac{a}{c})^{m+n}}$

140) Probar que $\int_0^{\infty} \frac{\ln t\, dt}{1+t^4} = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}$

141) Demostrar que $\int_0^{\infty} \frac{t^{n-1}}{1+t}dt = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(n\pi)}$, $0 < n < 1$ sin usar la propiedad $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$, $0 < p < 1$

142) Demostrar que: $\Gamma(-m-\frac{1}{2}) = \frac{2^{2m+1}(-1)^{m+1}\sqrt{\pi}\, n!}{(2n+1)!}$, $m \in Z^+$

143) Pruebe que $\frac{[\Gamma(1/3)]^2}{\Gamma(1/6)} = \sqrt{\pi}\,.\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$

144) ¿ Es cierto la identidad siguiente?

$$\Gamma(\mu) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu/2)}{2^{1-\mu}.\cos\frac{\pi\mu}{2}.\Gamma(\frac{1-\mu}{2})}$$ si es afirmativo demuéstrelo

145) Verifique que $\int_1^\infty \frac{(t-1)^p}{t^2}dt = \Gamma(1+p)\,\Gamma(1-p)$, $|p| < 1$

146) Calcular $\int_0^1 \frac{\mu^{n-1}(1-\mu)^{m-1}d\mu}{(a+\mu(b-a))^{m+n}}$ **Rpta.** $\frac{\beta(m,n)}{a^m b^n}$

147) Si m > 1, demostrar que $\int_0^\infty \frac{t^m dt}{r^2+t^{2m}} = \pi\sec(\frac{\pi}{2m}).\frac{r^{\frac{1-m}{m}}}{2m}$

148) Si $|p| < 1$, calcular $\int_0^1 (\frac{t}{1-t})^p.\frac{dt}{(a+t)}, a > 0$

Rpta. $\frac{a^{p-1}p\pi}{(a+1)^{p+1}\operatorname{sen} p\pi}$

149) Calcular $\int_0^\infty t^a(1+t)^b dt$ **Rpta.** $\frac{2\Gamma(a+1)\,\Gamma(-b-a-1)}{\Gamma(-b)}$

150) Calcular $\int_0^\infty \frac{\cosh(2a\theta)\,d\theta}{(\cosh\theta)^b}$

Rpta. $\frac{2^{b-1}\Gamma(a+b/2)\,\Gamma(b/2-a)}{\Gamma(b)}$

151) Verifique que. $2^{2p-1}\Gamma(p)\Gamma(p+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2p)$

152) Si $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{m}).\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{m})\ldots\operatorname{sen}(\frac{m-1}{m}\pi) = \frac{m}{2^{m-1}}, m = 2,3\ldots$

Calcular $\Gamma(\frac{1}{m})\Gamma(\frac{2}{m})\ldots\Gamma(\frac{m-1}{m})$

Rpta. $\frac{\sqrt{(2\pi)^{m-1}}}{\sqrt{m}}$

153) Probar que $\int_0^1 \ln(\Gamma(t))dt = \frac{1}{2}\ln(2\pi)$

154) Si $-1 < p < 2$, evaluar $\int_0^1 \frac{t^{1-p}(1-t)^p}{(1+t)^3}dt$

Rpta. $2^{p-3}\beta(2-p, p+1)$

155) Mostrar que : $\Gamma(-m+\frac{1}{2}) = \frac{(-2)^m\sqrt{\pi}}{(2m-1)!!}$

156) Mostrar que: $\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(-m+\frac{1}{2}) = (-1)^m \pi$, $m = 1,2\ldots$

157) Verifica que $[\Gamma(\frac{1}{4})]^2 = \frac{4.6.8.10.12.14\ldots}{5.5.9.9.13.13.17.17\ldots}8\sqrt{\pi}$

158) Calcular $\int_0^\infty \frac{t^{p-1}\ln t}{1+t}dt$ **Rpta.** $-\pi\operatorname{cosec}(p\pi).\operatorname{ctg}(p\pi)$

159) Verificar que: $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1-\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2})^{1/2}} = \frac{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2}{4\sqrt{\pi}}$

160) Calcular $\int_0^{\pi/2} \ln|\operatorname{sen} t|dt$ **Rpta.** $-\frac{\pi}{2}\ln 2$

161) Demostrar que: $\Gamma(p+1) = \sqrt{2\pi p}(\frac{p}{e})^p$, $p \in Z^+$, $p \to \infty$

162) Probar que: $\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}, \forall n \in Z^+$

163) Demostrar que para $\mu > 0$, $\int_0^\infty \frac{t \operatorname{sen} t\mu}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}e^{-\mu}$

164) Demostrar que: $\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty (\frac{t^{n-1}}{e^t - 1})dt = \sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}, n>1$

165) Demostrar que: $\int_0^\infty \operatorname{sen} x^n dx = \frac{1}{2n}(\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2n})\Gamma(n-\frac{1}{2n})}{\Gamma(n-\frac{1}{n})})$

166) Demostrar que: $\int_0^\infty \cos x^n dx = \frac{1}{2n}(\frac{\Gamma(\frac{1}{2n})\Gamma(2n-\frac{1}{2n})}{\Gamma(n-\frac{1}{n})})$

167) Calcular $\int_0^\infty J_0(t-\mu)\frac{J_1(\mu)}{\mu}d\mu$

Rpta. $J_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)}{m!(m+1)!}(\frac{t}{2})^{2m+1}$

168) Calcular $\int_0^\infty \mu^{n-1}e^{-\mu^n} J_0(r-\mu^{n/2})d\mu$ para todo n en R - {0}

Rpta. $\frac{e^{-r^2/4}}{n}$

169) Demostrar que: $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(t\operatorname{sen}^2\theta)d\theta = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\frac{t}{2})J_0(\frac{t}{2})$

170) Evaluar la integral $\int_0^\infty J_0(\mu^2)d\mu$

171) Evaluar la integral $\int_0^\infty J_0(\mu^4)d\mu$

172) Si $|p| > 1$, calcular $\int_0^{\infty} \text{sen}\, x^p dx$ usando transformada de Laplace

173) Verificar que: $\int_t^{t+1} \ln(\Gamma(\mu))d\mu = t\ln t - t + \frac{1}{2}\ln(2\pi)$

174) Verificar que:

$$\int_t^{t+n} \ln(\Gamma(\mu))d\mu = \ln[t^t.(t+1)^{t+1}.(t+2)^{t+2}\ldots(t+n-1)^{t+n-1}e^{-nt} - e^{(\frac{n+1}{2})^n}(2\pi)^{\frac{n}{2}}]$$

175) Probar que: $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$

176) Probar que: $J_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_t^{\pi} \cos(n\phi - t\,\text{sen}\,\phi)\,\phi - \frac{\text{sen}\,n\,\pi}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-n\phi - \text{sen}\,h\,\phi}d\phi$

177) Demostrar que:

$$\int_0^1\int_0^1 F(x,y)(1-x)^{m-1}y^m(1-y)^{n-1}dxdy = B(m,n)\int_0^1 F(u)(1-u)^{m+n-1}du$$

178) Si $x, y \in R^+$, calcular $\iint\limits_D x^{2m-1}y^{2n-1}dxdy$, tal que

$D = \{(x,y) \in (R^+)^2 / x^2 + y^2 \leq c^2\}$

Rpta. $\frac{C^{2m+2n}\Gamma(m)\Gamma(n)}{4\Gamma(m+n+1)}$

179) Demostrar que: $J_{\frac{3}{2}}(t)\,\text{sen}\,t - J_{-\frac{3}{2}}(t)\cos t = \frac{2}{\sqrt{\pi t^3}}$

180) Demostrar que: $J_0''(t) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t)]$

181) Hallar $\frac{d(x^2 J_3(2x))}{dx}$ **Rpta.** $xJ_3(2x) + 2x^2 J_2(2x)$

182) Demostrar que: $d\,(x^2 J_{p-1}(x)\, J_{p+1}(x)) = 2x^2 J_p(x)\dfrac{dJ_p(x)}{dx}$

183) Demostrar que: $J_p'(x) = J_{p-1}(x) - \dfrac{p}{x} J_p(x)$

184) Demostrar que: $J_p'(x) = \dfrac{p}{x} J_p(x) - J_{p+1}(x)$

185) $\dfrac{d[xJ_p(x)J_{p+1}(x)]}{dx} = x[J^2{}_p(x) - J^2{}_{p+1}(x)]$

186) Demostrar que: $J_3(x) = (\dfrac{8}{x^2} - 1)J_1(x) - \dfrac{4}{x} J_0(x)$

187) Demostrar que: $J_2'(t) = (1 - \dfrac{4}{t^2})J_1(t) + \dfrac{2}{t} J_0(x)$

188) Demostrar que: $\dfrac{d}{dx}(x^{-p} J_p(x)) = x^{-p} J_{p+1}(x)$

189) Demostrar que: $J_{-n}'(x) = (-1)^n J_n(x),\ \forall\, n \in Z$

190) Expresar $J_4(ax)$ en función de $J_0(ax)\, y\ J_1(ax)$

Rpta. $J_4'(ax) = (\dfrac{48}{a^3x^3} - \dfrac{8}{ax})\, J_1(ax) - (\dfrac{24}{a^2x^2} - 1)\, J_0(ax)$

191) Demostrar que:

a) $L\{f_{er}(t)\} = \dfrac{e^{s^2/4}}{s} f_{er}(s/2)\ ,\ s > 0$ b) $L\{f_{er}(\sqrt{t})\} = \dfrac{1}{s\sqrt{s+1}}\ ,\ s > 0$

c) $L\{f_{er}(at)\} = \dfrac{e^{s^2/4^a}}{s} f_{er}(\dfrac{s}{2^a})\ ,\ s > 0$ d) $L\{f_{er}(\dfrac{\alpha}{2\sqrt{t}})\} = \dfrac{1 - e^{-a\sqrt{s}}}{s}\ ,\ s > 0$

e) $L\{f_{er}(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}})\} = \frac{e^{-\alpha s}}{s}$, $s > 0$ f) $L\{f_{er}(\sqrt{t})\} = \frac{1}{\sqrt{s+1}\,(\sqrt{s+1}+1)}$

192) Calcular $\int_0^\infty (\operatorname{sen} h\,\theta)^b (\cos h\theta)^a\, d\theta$

193) Calcular $\int_0^\infty \frac{\ln t}{1+t^6}\, dt$

194) Probar que: $\int_t^{t+2} \ln(\Gamma(\mu))d\mu = t\ln t + (t+1)\ln(1+t) - 2t + \ln(2\pi) - 1$

195) Demostrar que $\int_0^\infty \frac{e^{-t}(1-J_0(t))}{t} dt = \ln(1+\sqrt{2})$

CAPITULO III

3. TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE.

Mediante la definición de transformada de Laplace se tiene: Si $F:[0,+\infty> \to R$, es una función seccionalmente continua y de orden exponencial, entonces $\exists\, L\{F(t)\} = f(s)$, ahora invertiremos el problema, es decir: dada la función f(s) queremos encontrar la función F(t) que corresponde a esta transformada y a esta función F(t) se llama la transformada inversa de f(s) y se simboliza por $L^{-1}\{f(s)\}$, es decir $F(t) = L^{-1}\{f(s)\}$.

Ejemplo.- Hallar F(t) si $f(s) = \dfrac{2}{s+3}$

Solución

$$F(t) = L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\{\frac{2}{s+3}\} = 2e^{-3t} \quad \text{de donde} \quad F(t) = 2e^{-3t}$$

Ejemplo.- Hallar F(t) si $f(s) = \dfrac{1}{s^2+4}$

Solución

$$F(t) = L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\{\frac{1}{s^2+4}\} = \frac{1}{2}L^{-1}\{\frac{2}{s^2+4}\} = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$$

de donde $F(t) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$

3.1 Propiedades de La Transformada Inversa de Laplace.

1er. Propiedad de Linealidad

Si a y b son constantes arbitrarios y f (s), g (s) son las transformada de F (t) y G (t) respectivamente entonces:

$$L^{-1}\{a\,f(s)+b\,g(s)\}=aL^{-1}\{f(s)\}+bL^{-1}\{g(s)\}=a\,F(t)+b\,G(t)$$

Demostración

Mediante la propiedad de linealidad de la transformada se tiene:

$$L\{a\,F(t)+b\,G(t)\}=aL\{F(t)\}+bL\{G(t)\}=a\,F(s)+b\,G(s)$$

Es decir que: $a\,f(s)+b\,g(s)=L\{a\,F(t)+b\,G(t)\}$, tomando la transformada inversa se tiene: $L^{-1}\{a\,f(s)+b\,g(s)\}=a\,F(t)+b\,G(t)=a\,L^{-1}\{f(s)\}+b\,L^{-1}\{g(s)\}$

Ejemplo.- Si $f(s)=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2+9}-\frac{3}{s-2}$. Hallar F(t)

Solución

$$F(t)=\{f(s)\}=L^{-1}\{\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2+9}-\frac{3}{s-2}\}=L^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}+L^{-1}\{\frac{1}{s^2+9}\}-3L^{-1}\{\frac{1}{s-2}\}$$

$$=t+\frac{1}{3}\operatorname{sen}3t-3e^{2t}$$

2da. Primera Propiedad de Traslación

Si $L^{-1}\{f(s)\}=F(t)$, entonces $L^{-1}\{f(s-a)\}=e^{at}F(t)$

Demostración

Se conoce que: Si $L\{f(t)\} = F(s) \Rightarrow L\{e^{at} F(t)\} = f(s-a)$ de donde $e^{at} F(t) = L^{-1}\{f(s-a)\}$ otra forma es:

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)dt \Rightarrow f(s-a) = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} F(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-st}.e^{at} F(t)dt = L\{e^{at} F(t)\}$$

por lo tanto $f(s-a) = L\{e^{at} F(t)\}$ de donde: $L^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at} F(t)$

Ejemplo.- Hallar F(t) si $f(s) = \dfrac{s-2}{(s-2)^2+9}$

Solución

$$F(t) = L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\{\frac{s-2}{(s-2)^2+9}\} = e^{2t} L^{-1}\{\frac{s}{s^2+9}\} = e^{2t} \cos 3t$$

3era. Segunda Propiedad de Traslación.

Si $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, entonces $L^{-1}\{e^{-as} f(s)\} = \begin{cases} F(t-a), & t > a \\ 0 & , t < a \end{cases}$

Demostración

Como $f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)dt$, entonces multiplicamos por e^{-as}

$$e^{-as} f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-as}.e^{-st} F(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-s(t+a)} F(t)dt$$

Sea $t + a = u \Rightarrow dt = du$; Cuando $t = 0$; $u = a$ y cuando t→+∞ ; u→+∞

$$e^{-as} f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-s(t+a)} F(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-su} F(u-a)du$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-su} \underbrace{F(u-a)du}_{0} = \int_0^{a} e^{-su} \underbrace{F(u-a)du}_{0}$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-su} F(u-a)du = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t-a)dt = L\{F(t-a)\}$$

4ta. Propiedad de Cambio de Escala.-

Si $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, entonces $L^{-1}\{f(ks)\} = \frac{1}{k} F(\frac{t}{k})$

<u>**Demostración**</u>

como $f(s) = \int_0^{s} e^{-st} F(t)dt \Rightarrow f(ks) = \int_0^{+\infty} e^{-kst} F(t)dt$

sea $u = kt \Rightarrow dt = \frac{du}{k}$ donde $t = \frac{u}{k}$

$$f(ks) = \int_0^{+\infty} e^{-skt} F(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-su} F(\frac{u}{k}) \frac{du}{k}$$

$$= \frac{1}{k} \int_0^{+\infty} e^{-su} F(\frac{u}{k})du = \frac{1}{k} L\{F(\frac{t}{k})\}$$

entonces : $L^{-1}\{f(ks)\} = \frac{1}{k} F(\frac{t}{k})$

Ejemplo.- Hallar F(t) si $f(s) = \frac{1}{9s^2+1}$

<u>**Solución**</u>

Sea $L^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\} = \operatorname{sen} t \Rightarrow L^{-1}\{\frac{1}{(3s)^2+1}\} = \frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{t}{3}$

3.2.- Transformada Inversa De Laplace De la Derivada.

Teorema.- Si $L^{-1}\{f(s)\}=F(t)$ entonces $L^{-1}\{f^{(n)}(s)\}=(-1)^n t^n F(t)$

Demostración

como $L\{t^n F(t)\}=(-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}L\{F(t)\}=(-1)^n f^{(n)}(s)$

tomando la inversa a ambos miembros.

$$L^{-1}\{f^{(n)}(s)\}=(-1)^n t^n F(t)$$

Ejemplo.- Hallar $L^{-1}\{\ln(\dfrac{s+2}{s+1})\}$

Solución

como $L\{t\,F(t)\}=-f'(s) \Rightarrow L^{-1}\{f'(s)\}=-t\,F(t)$

$$\Rightarrow L^{-1}\{f'(s)\}=-tL^{-1}\{f(s)\}$$

Luego $L^{-1}\{f(s)\}=-\dfrac{1}{t}L^{-1}\{f'(s)\}$

aplicando este resultado al ejercicio dado.

$$L^{-1}\{\ln(\frac{s+2}{s+1})\}=L^{-1}\{\ln(s+2)-\ln(s+1)\}$$

$$=-\frac{1}{t}L^{-1}\{\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+1}\}=-\frac{1}{t}(e^{-2t}-e^{-t})=\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}$$

3.3. Transformada Inversa De Laplace De Las Integrales.

Teorema.- Si $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ entonces $L^{-1}\{\int_s^{+\infty} f(u)du\} = \frac{F(t)}{t}$

Demostración

como $L\{F(t)\} = f(s) \Rightarrow L\{\frac{F(t)}{t}\} = \int_s^{\infty} f(u)du$

de donde al tomar la transformada inversa se tiene.

$$L^{-1}\{\int_s^{\infty} f(u)du\} = \frac{F(t)}{t}$$

Ejemplo.- Calcular la transformada inversa de $L^{-1}\{\int_s^{\infty} \frac{ds}{s^2+a^2}\}$

Solución

Si $L\{F(t)\} = f(s) \Rightarrow L\{\frac{F(t)}{t}\} = \int_s^{\infty} f(s)ds$, de donde $L^{-1}\{\int_s^{\infty} f(s)ds\} = \frac{F(t)}{t}$

Luego si $L^{-1}\{f(s)\} = F(t) \Rightarrow L^{-1}\{\int_s^{\infty} f(s)ds\} = \frac{F(t)}{t}$

ahora aplicamos este resultado al ejercicio dado.

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^2+a^2}\} = \frac{\operatorname{sen} at}{a} \Rightarrow L^{-1}\{\int_s^{\infty} \frac{ds}{s^2+a^2}\} = \frac{\operatorname{sen} at}{at}$$

3.4. Transformada Inversa de Laplace de la multiplicación por s.

Teorema.- Si $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ y $F(0) = 0$ entonces $L^{-1}\{s\, f(s)\} = F'(t)$

Demostración

como $L^{-1}\{f(s)\} = F(t) \Rightarrow L\{F(t)\} = f(s)$, de donde

$L\{F'(t)\} = sL\{F(t)\} - F(0) = sL\{F(t)\}$, es decir:

$L\{F'(t)\} = s\,f(s)$ entonces $L^{-1}\{s\,f(s)\} = F'(t)$

Ejemplo.- Hallar $L^{-1}\{\dfrac{s}{(s+1)^5}\}$

Solución

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)^5}\} = e^{-t}L^{-1}\{\frac{1}{s^5}\} = \frac{t^4e^{-t}}{24}$$

$$L^{-1}\{\frac{s}{(s+1)^5}\} = \frac{t^3e^{-t}}{6} - \frac{t^4e^{-t}}{24} = \frac{e^{-t}}{24}(4t^3 - t^4)$$

3.5. Transformada Inversa de Laplace De La División por s.

Teorema.- Si $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ entonces $L^{-1}\{\dfrac{f(s)}{s}\} = \int_0^t F(u)du$

Demostración

como $L^{-1}\{f(s)\} = F(t) \Rightarrow L\{F(t)\} = f(s)$ de donde

$$L\{\int_0^t F(u)du\} = \frac{f(s)}{s} \Rightarrow L^{-1}\{\frac{f(s)}{s}\} = \int_0^t F(u)du$$

Ejemplo.- Encontrar $L^{-1}\{\dfrac{1}{s}\ln(1+\dfrac{1}{s^2})\}$

Solución

$$L^{-1}\{\ln(1+\frac{1}{s^2})\} = L^{-1}\{\ln(s^2+1)-\ln s^2\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\{\frac{2s}{s^2+1}-\frac{2}{s}\}$$

$$= -\frac{1}{t}(2\cos t - 2) = \frac{2(1-\cos t)}{t}$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s}\ln(1+\frac{1}{s^2})\} = \int_0^t \frac{2(1-\cos u)}{u}\,du$$

3.6. Transformada Inversa De Laplace por el método de las Fracciones Parciales.

Las funciones racionales $\frac{P(s)}{Q(s)}$, donde P(s) y Q(s) son polinomios en las cuales el grado de P(s) es menor que el grado de Q(s), pueden expresar como una suma de funciones racionales simples, aplicando el criterio de descomposición estudiado en el caso de las integrales de funciones racionales.

Ejemplo.- Hallar $L^{-1}\{\frac{11s^2-2s+5}{(s-2)(2s-1)(s+1)}\}$

Solución

$$\frac{11s^2-2s+5}{(s-2)(2s-1)(s+1)} = \frac{A}{s-2}+\frac{B}{2s-1}+\frac{C}{s+1}$$

$$= \frac{A(2s-1)(s+1)+B(s-2)(s+1)+C(s-2)(2s-1)}{(s-2)(2s-1)(s+1)}$$

$$11s^2-2s+5 = A(2s-1)(s+1)+B(s-2)(s+1)+C(s-2)(2s-1)$$

$$11s^2-2s+5 = A(2s^2+s-1)+B(s^2-s-2)+C(2s^2-5s+2)$$

$$11s^2-2s+5 = (2A+B+2C)s^2+(A-B-5C)s-A-2B+2C$$

$$\begin{cases} 2A+B+2C=11 \\ A-B-5C=-2 \\ -A-2B+2C=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A=5 \\ B=-3 \\ C=2 \end{matrix}$$

$$L^{-1}\{\frac{11s^2-2s+5}{(s-2)(2s-1)(s+1)}\} = L^{-1}\{\frac{5}{s-2} - \frac{3}{2s-1} + \frac{2}{s+1}\}$$

$$= 5L^{-1}\{\frac{1}{s-2}\} - \frac{3}{2}L^{-1}\{\frac{1}{s-\frac{1}{2}}\} + 2L^{-1}\{\frac{1}{s+1}\}$$

$$= 5e^{2t} - \frac{3}{2}e^{t/2} + 2e^{-t}$$

3.7. Teorema (Formula del Desarrollo de HEAVISIDE).

Sean P(s) y Q(s) polinomios en los cuales P(s) es de grado menor que el grado de Q(s). Si Q(s) tiene n raíces diferentes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; entonces

$$L^{-1}\{\frac{P(s)}{Q(s)}\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(\alpha k)}{Q'(\alpha k)} e^{\alpha_k t}$$

<u>Demostración</u>

Si el polinomio Q(s) tiene n raíces diferentes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; por lo tanto de acuerdo al método de la descomposición de las funciones racionales se puede expresar así:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s-\alpha_1} + \frac{A_2}{s-\alpha_2} + \ldots + \frac{A_k}{s-\alpha_k} + \ldots + \frac{A_n}{s-\alpha_n} \qquad \ldots (1)$$

a la ecuación (1) multiplicamos por $s-\alpha_k$, es decir:

$$\frac{P(s)}{Q(s)}(s-\alpha_k) = (\frac{A_1}{s-\alpha_1} + \frac{A_2}{s-\alpha_2} + \ldots + \frac{A_k}{s-\alpha_k} + \ldots + \frac{A_n}{s-\alpha_n})(s-\alpha_k) \qquad \ldots (2)$$

ahora tomando límite cuando $s \to \alpha_k$ y aplicando la regla de L'Hospital, se tiene:

$$A_k = \lim_{s\to\alpha_k} \frac{P(s)}{Q(s)}(s-\alpha_k) = \lim_{s\to\alpha_k} P(s).\frac{s-\alpha_k}{Q(s)}$$

$$= \lim_{s\to\alpha_k} P(s).\lim_{s\to\alpha_k} \frac{s-\alpha_k}{Q(s)} = \lim_{s\to\alpha_k} P(s).\lim_{s\to\alpha_k} P(s).\lim_{s\to\alpha_k} \frac{1}{Q'(s)}$$

$$= P(\alpha k).\frac{1}{Q'(\alpha k)} = \frac{P(\alpha k)}{Q'(\alpha k)}$$

$$\therefore \quad A_k = \frac{P(\alpha k)}{Q'(\alpha k)} \qquad \ldots (3)$$

reemplazando (3) en (1) se tiene:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)}.\frac{1}{s-\alpha_1} + \frac{P(\alpha_2)}{Q'(\alpha_2)}\frac{1}{s-\alpha_2} + \ldots + \frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)}\frac{1}{s-\alpha_n}$$

tomando la transformada inversa de Laplace se tiene:

$$L^{-1}\{\frac{P(s)}{Q(s)}\} = L^{-1}\{\frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)}.\frac{1}{s-\alpha_1} + \frac{P(\alpha_2)}{Q'(\alpha_2)}.\frac{1}{s-\alpha_2} + \ldots + \frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)}.\frac{1}{s-\alpha_n}\}$$

$$= \frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)}e^{\alpha_1 t} + \frac{P(\alpha_2)}{Q'(\alpha_2)}e^{\alpha_2 t} + \ldots + \frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)}e^{\alpha_n t}$$

$$\therefore \quad L^{-1}\{\frac{P(s)}{Q(s)}\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(\alpha k)}{Q'(\alpha k)}e^{\alpha_n t}$$

Ejemplo.- Calcular $L^{-1}\{\frac{19s+37}{(s-2)(s+1)(s+3)}\}$

Solución

$$Q(s) = (s-2)(s+1)(s+3) = s^3 + 2s^2 - 5s - 6$$

$$Q'(s) = 3s^2 + 4s - 5 \Rightarrow Q'(2) = 15,\ Q'(1) = -6,\ Q'(-3) = 10$$

P(s) = 19s + 37 $\Rightarrow$ P(2) = 75 , P(-1) = 18 , P(-3) = -20

$$L^{-1}\{\frac{19s+37}{(s-2)(s+1)(s+3)}\} = \frac{P(2)}{Q'(2)}e^{2t} + \frac{P(-1)}{Q'(-1)}e^{-t} + \frac{P(-3)}{Q'(-3)}e^{-3t}$$

$$= 5e^{2t} - 3e^{-t} - 2e^{-3t}$$

Observación.- Supongamos que $f(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$ son polinomios en donde el grado P(s) es menor que el grado de Q(s), pero en este caso Q(s) = 0 tiene una raíz "a" de multiplicidad m, mientras que las otras raíces $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son todas distintas entre si. Entonces se tiene:

i) $$f(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{(s-a)^m} + \frac{A_2}{(s-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_m}{s-a} + \frac{B_1}{s-b_1} + \ldots + \frac{B_n}{s-b_n}$$

ii) $$A_k = \lim_{s \to a} \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{d^k}{ds^k}(s-a)^n f(s) \quad , \ \mathrm{k} = 1,2,\ldots,\mathrm{m}$$

Entonces la transformada inversa es:

$$L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\{\frac{P(s)}{Q(s)}\} = e^{at}\left(\frac{A_1 t^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{A_2 t^{m-2}}{(m-2)!} + \ldots + A_m\right) + B_1 e^{b_1 t} + B_2 e^{b_2 t} + \ldots + B_n e^{b_n t}$$

3.8. La Convolución.

a) **Definición.-** Sea F y G dos funciones continuas por tramos en cada intervalo finito y cerrado $0 \le t \le b$ y de orden exponencial. La función que denotaremos por F*G y que viene definidas por:

$$F(t) * G(t) = \int_0^t F(u)G(t-u)du$$

recibe el nombre de convolución de las funciones F y G.

Ejemplo.- La convolución de $F(t)=e^t$ y G(t) = sen t es:

$$e^t * \operatorname{sen} t = \int_0^t e^u \operatorname{sen}(t-u)du = \int_0^t e^u (\operatorname{sen} t \cos u - \operatorname{sen} u \cos t)du$$

$$= \int_0^t e^u \operatorname{sen} t \cos u \, du - \int_0^t e^u \operatorname{sen} u \cos t \, du$$

$$= [\frac{\operatorname{sen} t}{2}(e^u \cos u + e^u \operatorname{sen} u) - \frac{\cos t}{2}(e^u \operatorname{sen} u - e^u \cos u)] \Big/_0^t$$

$$= \frac{1}{2}[\operatorname{sen} t\, e^t \cos t + \operatorname{sen}^2 t\, e^t - \cos t\, e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos^2 t] - \frac{1}{2}[\operatorname{sen} t + \cos t]$$

$$= \frac{1}{2}[e^t - \operatorname{sen} t - \cos t]$$

$$\therefore \; e^t * \operatorname{sen} t = \frac{1}{2}(e^t - \operatorname{sen} t - \cos t)$$

3.9 Teorema De La Convolución.

Sean F(t) y G(t) funciones continuas por tramos $\forall$ t $\geq$ 0 y de orden exponencial, entonces:

$$L\{F(t)*G(t)\} = L\{F(t)\}.L\{G(t)\} = f(s).g(s)$$

Demostración

Sea $f(s) = L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-s\alpha} F(\alpha)d\alpha$

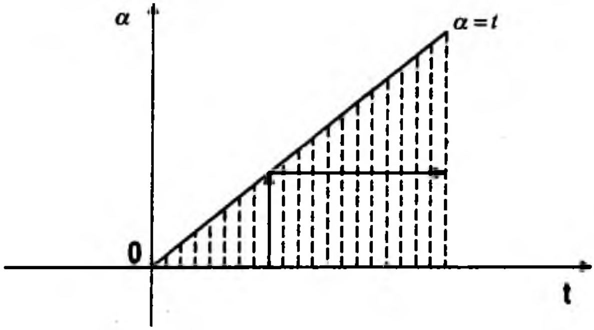
$$g(s) = L\{G(t)\} = \int_0^\infty e^{-s\beta} F(\beta)d\beta$$

$$f(s).g(s) = (\int_0^\infty e^{-s\alpha} F(\alpha)d\alpha)(\int_0^\infty e^{-s\beta} F(\beta)d\beta) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(\alpha+\beta)} F(\alpha)G(\beta)d\alpha\, d\beta$$

$$= \int_0^\infty F(\alpha)d\alpha \int_0^\infty e^{-s(\alpha+\beta)} G(\beta)d\beta$$

dejando α fijo, hacemos t = α + β, dt = dβ, de modo que:

$$f(s).g(s) = \int_0^\infty F(\alpha)d\alpha \int_\alpha^\infty e^{-st} G(t-\alpha)dt$$



En el plano tα estamos integrando sobre la región sombreada, como F y G son continua por partes ∀ t ≥ 0 y de orden exponencial se puede demostrar que es posible intercambiar el orden de integración:

$$f(s).g(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt \int_\alpha^\infty F(\alpha)G(t-\alpha)d\alpha$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \{\int_0^t F(\alpha)G(t-\alpha)d\alpha\}dt = L\{F * G\}$$

$$\therefore \quad L\{F(t)*G(t)\} = L\{F(t)\}.L\{G(t)\} = f(s).g(s)$$

Ejemplo.- Calcular $L\{\int_0^t e^u \operatorname{sen}(t-u)du\}$

Solución

Sean $F(t) = e^t$ y G(t) = sen t, entonces por el teorema

$$L\{\int_0^t e^u \operatorname{sen}(t-u)du\} = L\{e^t\}.L\{\operatorname{sen} t\}$$

$$= \frac{1}{s-1}.\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}$$

Nota: $e^t * \operatorname{sen} t = \int_0^t e^u \operatorname{sen}(t-u)du$

3.10 Teorema De Convolución para La Transformada Inversa.

Suponiendo que $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ y $L^{-1}\{g(s)\} = G(t)$.

Entonces $L^{-1}\{f(s).g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u)du = F*G$

donde F*G es la convolución de F y G.

Demostración

Si se prueba que $L\{\int_0^t F(u)G(t-u)du\} = f(s).g(s)$ ... **(1)**

entonces el teorema quedara demostrado.

donde $L\{F(t)\} = f(s)$ y $L\{G(t)\} = g(s)$

$$L\{\int_0^t F(u)G(t-u)du\} = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st}(\int_{u=0}^{t} F(u)G(t-u)du)dt$$

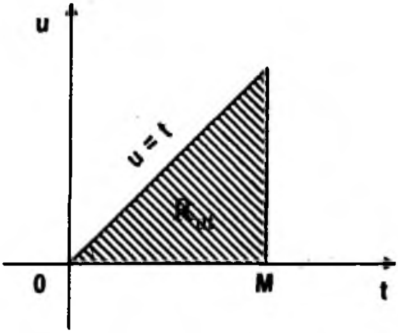
$$= \int_{t=0}^{\infty}\int_{u=0}^{t} e^{-st} F(u)G(t-u)du\,dt = \lim_{M\to\infty} S_M, \text{ donde}$$

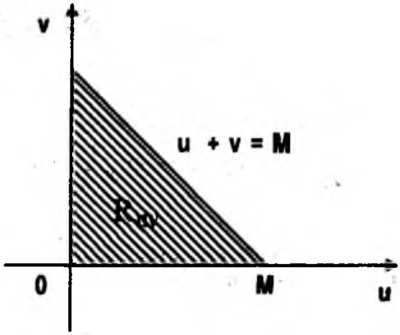
$$S_M = \int_{t=0}^{M}\int_{u=0}^{t} e^{-st} F(u)G(t-u)du\,dt \quad \dots \textbf{(2)}$$

Consideremos la región R_{tu} sobre el cual se calcula la integral doble.

Haciendo $t = u = v \Rightarrow t = u + v$

ahora a la región R_{tu} la transformamos en al región R_{uv}.





$$S_M = \iint_{R_{tu}} e^{-st} F(u)G(t-u)du\,dt = \iint_{R_{uv}} e^{-s(u+v)} F(u)G(u)\left|\frac{\partial(u,t)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv \quad \ldots (3)$$

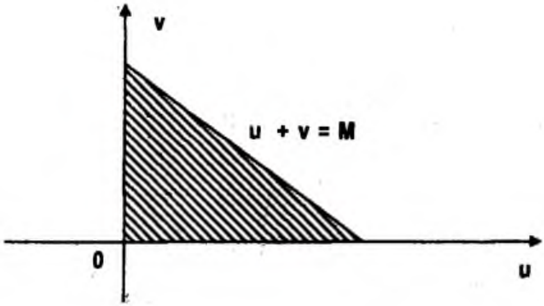
donde el jacobiano de la transformación es.

$$J(u,v) = \frac{\partial(u,t)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

por lo tanto: $S_M = \iint_{R_{uv}} e^{-s(u+v)} F(u)G(u)du\,dv$

ahora definiremos la función siguiente.

$$k(u,v) = \begin{cases} e^{-s(u+v)} F(u)G(v) & , \quad si \quad u+v \le M \\ 0 & , \quad si \quad u+v > M \end{cases}$$



$S_M = \int_{v=0}^{M}\int_{u=0}^{M} k(u,v)du\,dv$, entonces,

$$\lim_{M\to\infty} S_M = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} k(u,v)du\,dv = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-s(u+v)}F(u)G(v)du\,dv$$

$$= (\int_0^{\infty} e^{-su}F(u)du)(\int_0^{\infty} e^{-sv}G(v)dv)$$

$$\lim_{M\to\infty} S_M = L\{F(u)\}.L\{G(v)\} = f(s).g(s) \qquad \ldots (\alpha)$$

como $L\{\int_0^t F(u)G(t-u)du\} = \lim_{M\to\infty} S_M \qquad \ldots (\beta)$

por lo tanto de (α) y (β) se tiene:

$$f(s).g(s) = L\{\int_0^t F(u)G(t-u)du\}$$

$$\therefore \quad L^{-1}\{f(s).g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u)du = F*G$$

Observación.- La convolución de F y G es conmutativa, es decir F*G = G*F

Ejemplo.- Calcular $L^{-1}\{\frac{1}{(s-1)(s+4)}\}$

Solución

Sea $f(s)=\dfrac{1}{s-1}$ y $g(s)=\dfrac{1}{s+4}$ de donde

$$L^{-1}\{f(s)\}=e^{t}=F(t) \text{ y } L^{-1}\{g(s)\}=e^{-4t}=G(t)$$

por lo tanto por el teorema de convolución se tiene:

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s-1)(s+4)}\}=\int_0^t F(u)G(t-u)du=\int_0^t e^{u}.e^{-4(t-u)}du$$

$$=e^{-4t}\int_0^t e^{5u}du=e^{-4t}.\frac{e^{5u}}{5}\Big/_0^t=\frac{e^{t}}{5}-\frac{e^{-4t}}{5}$$

Ejemplo.- Calcular $L^{-1}\{\dfrac{s^2}{(s^2+4)^2}\}$

Solución

$$L^{-1}\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\}=L^{-1}\{\frac{s}{s^2+4}.\frac{s}{s^2+4}\},\text{ de donde}$$

$f(s)=\dfrac{s}{s^2+4}$ y $g(s)=\dfrac{s}{s^2+4}$, por lo tanto

$$L^{-1}\{f(s)\}=\cos 2t=F(t) \text{ y } L^{-1}\{g(s)\}=\cos 2t=G(t)$$

$$L^{-1}\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\}=\int_0^t F(u)G(t-u)du=\int_0^t \cos 2u.\cos(2t-2u)du$$

$$=\int_0^t \cos 2u(\cos 2t\cos 2u+\operatorname{sen} 2t\operatorname{sen} 2u)du$$

$$=\cos 2t\int_0^t \cos^2 2u\,du+\operatorname{sen} 2t\int_0^t \operatorname{sen} 2u.\cos 2u\,du$$

$$= \cos 2(\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 4t}{8}) + \operatorname{sen} 2t(\frac{\operatorname{sen}^2 2t}{4})$$

$$= \frac{t\cos 2t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t.\cos^2 2t}{4} + \frac{\operatorname{sen}^3 2t}{4} = \frac{t\cos t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}$$

$$\therefore \quad L^{-1}\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\} = \frac{t\cos 2t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}$$

3.11. La Función Error.

A la función error denotaremos por f_{er} y es definido por:

$$f_{er}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du$$

al evaluar transformada inversas de ciertas funciones simples de s se encuentra la función error por ejemplo: se conoce que $L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s}}\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ entonces por la propiedad de traslación.

$$L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s+1}}\} = \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}$$

ahora aplicamos el teorema de convolución a la transformada inversa de $L^{-1}\{\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\}$, es decir: $L^{-1}\{\frac{1}{s}\} = 1 = F(t)$ y $L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s+1}}\} = \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}} = G(t)$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\} = \int_0^t 1.\frac{e^{-u}}{\sqrt{\pi u}} du = \int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{\pi u}} du \qquad \textbf{... (1)}$$

Sea $u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx = 2\sqrt{u}dx$

para u = 0; x = 0 y para u = t , $x = \sqrt{t}$

Luego reemplazando en (1) se tiene:

$$L^{-1}\{\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\} = \int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{\pi u}} du = \int_0^{\sqrt{t}} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi x}} 2x\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2} dx = f_{er}(\sqrt{t})$$

$$\therefore \quad L^{-1}\{\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\} = f_{er}(\sqrt{t})$$

3.12. La Función Complementaria de Error.

A la función complementaria de error definiremos por:

$$f_a(t) = 1 - f_{er}(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du = \frac{2}{\pi} \int_t^{\infty} e^{-u^2} du$$

3.13. Las Integrales Del Seno y Coseno.

A las integrales del seno y coseno se definen de la siguiente manera.

$$I_s(t) = \int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u} du \quad ; \quad I_c(t) = \int_t^{\infty} \frac{\cos u}{u} du$$

3.14. La Integral Exponencial.

A la integral exponencial se define de la siguiente manera:

$$I_e(t) = \int_t^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

Observación.- Se ha estudiado la función escalón unidad y su respectiva transformada de Laplace. Ahora expresaremos la transformada inversa en términos de la función escalón unidad y los expresaremos mediante el teorema siguiente.

3.15. Teorema. Si $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ y $c \geq 0$, y si a F(t) se le asigna valores (no importa cuales) para $-c < t < 0$. Entonces: $L^{-1}\{e^{-cs} f(s)\} = F(t-c)\mu(t-c)$

Ejemplo.- Evaluar $L^{-1}\{\dfrac{e^{-4s}}{(s+2)^3}\}$

<u>**Solución**</u>

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s+2)^3}\} = e^{-2t} L^{-1}\{\frac{1}{s^3}\} = 2t^2 e^{-2t} = F(t)$$

$$L^{-1}\{\frac{e^{-4s}}{(s+2)^3}\} = F(t-4)\mu(t-4) = 2(t-4)^2 e^{-2(t-4)} \mu(t-4)$$

3.16. Ejercicios Desarrollados.-

1) Hallar la transformada de Laplace inversa de:

a) $L^{-1}\{\dfrac{3s-12}{s^2+8}\}$

<u>**Solución**</u>

$$L^{-1}\{\frac{3s-12}{s^2+8}\} = 3L^{-1}\{\frac{s}{s^2+8}\} - \frac{6}{\sqrt{2}} L^{-1}\{\frac{2\sqrt{2}}{s^2+8}\} = 3\cos 2\sqrt{2}t - 3\sqrt{2}\,\text{sen}\, 2\sqrt{2}t$$

b) $L^{-1}\{\dfrac{1}{2s-5}\}$

<u>**Solución**</u>

$$L^{-1}\{\frac{1}{2s-5}\} = \frac{1}{2} L^{-1}\{\frac{1}{s-\frac{5}{2}}\} = \frac{1}{2} e^{\frac{5}{2}t}$$

c) $\quad L^{-1}\{\frac{s}{s^2-2\pi s+2\pi^2}\}$

Solución

$$L^{-1}\{\frac{s}{s^2-2\pi s+2\pi^2}\}=L^{-1}\{\frac{s-\pi+\pi}{(s-\pi)^2+\pi^2}\}=L^{-1}\{\frac{s-\pi}{(s-\pi)^2+\pi^2}\}+L^{-1}\{\frac{\pi}{(s-\pi)^2+\pi^2}\}$$

$$=e^{\pi t}\cos \pi t+e^{\pi t}\operatorname{sen}\pi t$$

d) $\quad L^{-1}\{\frac{3s-8}{s^2+4}-\frac{4s-24}{s^2-16}\}$

Solución

$$L^{-1}\{\frac{3s-8}{s^2+4}-\frac{4s-24}{s^2-16}\}=L^{-1}\{\frac{3s-8}{s^2+4}\}-L^{-1}\{\frac{4s-24}{s^2-16}\}$$

$$=3L^{-1}\{\frac{s}{s^2+4}\}-4L^{-1}\{\frac{2}{s^2+4}\}-4L^{-1}\{\frac{s}{s^2-16}\}+6L^{-1}\{\frac{4}{s^2-16}\}$$

= 3 eos 2t - 4 sen 2t - 4 cosh 4t + 6 senh 4t

e) $\quad L^{-1}\{\frac{s}{(s+1)^5}\}$

Solución

Mediante la propiedad de traslación se tiene

$$L^{-1}\{\frac{s}{(s+1)^5}\}=e^{-t}L^{-1}\{\frac{s-1}{s^5}\}=e^{-t}L^{-1}\{\frac{1}{s^4}-\frac{1}{s^5}\}=e^{-t}(\frac{t^3}{6}-\frac{t^4}{24})=\frac{e^{-t}}{24}(4t^3-t^4)$$

f) $\quad L^{-1}\{\frac{3s+2}{4s^2+12s+9}\}$

Solución

$$L^{-1}\{\frac{3s+2}{4s^2+12s+9}\}=\frac{3}{4}L^{-1}\{\frac{s+2/3}{s^2+3s+9/4}\}=\frac{3}{4}L^{-1}\{\frac{1}{s+3/2}\}=\frac{3}{4}e^{-\frac{3}{2}t}$$

2) Hallar la transformada inversa de Laplace.

a) $L^{-1}\{\frac{2s-6}{s^3-s}\}$

Solución

Descomponiendo en fracciones parciales.

$$\frac{2s-6}{s^3-s}=\frac{2s-6}{s(s+1)(s-1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s-1}=\frac{A(s+1)(s-1)+Bs(s-1)+Cs(s+1)}{s(s+1)(s-1)}$$

$$2s-6=A(s^2-1)+B(s^2-s)+C(s^2+s)$$

$$2s-6=(A+B+C)s^2+(-B+C)s-A$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -B+C=2 \\ -A=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A=6 \\ B=-4 \\ C=-2 \end{matrix}$$

$$\frac{2s-6}{s^3-s}=\frac{6}{s}-\frac{4}{s+1}-\frac{2}{s-1}$$

$$L^{-1}\{\frac{2s-6}{s^3-s}\}=L^{-1}\{\frac{6}{s}-\frac{4}{s+1}-\frac{2}{s-1}\}=6-4e^{-t}-2e^{t}$$

b) $L^{-1}\{\frac{s^2-2s+2}{(s+3)(s^2+2s+2)}\}$

Solución

Descomponiendo en fracciones parciales.

$$\frac{s^2-2s+2}{(s+3)(s^2+2s+2)}=\frac{A}{s+3}+\frac{Bs+C}{s^2+2s+2}=\frac{A(s^2+2s+2)+(Bs+c)(s+3)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

$$s^2-2s+2=A(s^2+2s+2)+B(s^2+3s)+C(s+3)$$

$$s^2-2s+2=(A+B)s^2+(2A+3B+C)s+2A+3C$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+3B+C=-2 \\ 2A+3C=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{17}{5} \\ B=-\dfrac{12}{5} \\ C=-\dfrac{8}{5} \end{cases}$$

$$\frac{s^2-2s+2}{(s+3)(s^2+2s+2)}=\frac{17}{5(s+3)}-\frac{1}{s}\left(\frac{12s+8}{s^2+2s+2}\right)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2-2s+2}{(s+3)(s^2+2s+2)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{17}{5(s+3)}-\frac{1}{5}\left(\frac{12s+8}{s^2+2s+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{17}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)}\right\}-\frac{12}{5}L^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right\}+\frac{4}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\}$$

$$=\frac{17}{5}e^{-3t}-\frac{12}{5}e^{-t}\cos t+\frac{4}{5}e^{-t}\operatorname{sen} t$$

c) $L^{-1}\left\{\dfrac{s^2-2s+3}{(s-1)^2(s+1)}\right\}$

Solución

$$\frac{s^2-2s+3}{(s+1)^2(s+1)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{(s-1)^2}=\frac{A(s-1)^2+B(s+1)(s-1)+C(s+1)}{(s+1)(s-1)^2}$$

$$s^2-2s+2=A(s^2-2s+1)+B(s^2-1)+C(s+1)$$

$$=(A+B)s^2+(-2A+C)s+A-B+C$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A+C=-2 \\ A-B+C=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{5}{4} \\ B=-\dfrac{1}{4} \\ C=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$L^{-1}\{\frac{s^2-2s+3}{(s-1)^2(s+1)}\}=L^{-1}\{\frac{5}{4(s+1)}-\frac{1}{4(s-1)}+\frac{1}{2(s-1)^2}\}$$

$$=\frac{5}{4}L^{-1}\{\frac{1}{s+1}\}-\frac{1}{4}L^{-1}\{\frac{1}{s-1}\}+\frac{1}{2}L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)^2}\}=\frac{5}{4}e^{-t}-\frac{1}{4}e^{t}+\frac{te^{t}}{2}$$

d) $L^{-1}\{\dfrac{1}{s^3+a^3}\}$

Solución

Descomponiendo en fracciones parciales.

$$\frac{1}{s^3+a^3}=\frac{1}{(s+1)(s^2-as+a^2)}=\frac{A}{s+a}+\frac{Bs+C}{s^2-as+a^2}$$

$$=\frac{A(s^2-as+a^2)+(Bs+c)(s+a)}{(s+a)(s^2-as+a^2)}$$

$$1=A(s^2-as+a^2)+B(s^2+as)+C(s+a)$$

$$1=(A+B)s^2+(-aA+aB+C)s+a^2A+aC$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -aA+aB+C=0 \\ a^2A+aC=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{3a^2} \\ B=-\dfrac{1}{3a^2} \\ C=\dfrac{2}{3a} \end{cases}$$

$$\frac{1}{s^3+a^3}=\frac{1}{3a^2(s+a)}-\frac{1}{3a^2}\left(\frac{s-a}{s^2-as+a^2}\right)$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^3+a^3}\}=L^{-1}\{\frac{1}{3a^2(s+a)}-\frac{1}{3a^2}\left(\frac{s-a}{s^2-as+a^2}\right)\}$$

$$=\frac{1}{3a^2}L^{-1}\{\frac{1}{s+a}\}-\frac{1}{3a^2}L^{-1}\{\frac{s-2a}{(s-\frac{a}{2})^2+\frac{3a^2}{4}}\}$$

$$=\frac{1}{3a^2}L^{-1}\{\frac{1}{s+a}\}-\frac{1}{3a^2}[L^{-1}\{\frac{s-\frac{a}{2}}{(s-\frac{a}{2})^2+\frac{3a^2}{4}}\}-\sqrt{3}L^{-1}\{\frac{\sqrt{3}\frac{a}{2}}{(s-\frac{a}{2})^2+\frac{3a^2}{4}}\}$$

$$=\frac{1}{3a^2}e^{-at}-\frac{1}{3a^2}e^{\frac{a}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{3a^2}t+\frac{\sqrt{3}}{3a^2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}a}{2}t$$

e) $\quad L^{-1}\{\dfrac{1-2\sqrt{3}s}{4s^2+1}\}$

Solución

$$L^{-1}\{\frac{1-2\sqrt{3}s}{4s^2+1}\}=\frac{1}{4}L^{-1}\{\frac{1}{s^2+\frac{1}{4}}\}-\frac{2\sqrt{3}}{4}L^{-1}\{\frac{s}{s^2+\frac{1}{4}}\}$$

$$=\frac{1}{2}L^{-1}\{\frac{\frac{1}{2}}{s^2+\frac{1}{4}}\}-\frac{\sqrt{3}}{2}L^{-1}\{\frac{s}{s^2+\frac{1}{4}}\}=\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{t}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{t}{2}$$

3) Hallar $L^{-1}\{\frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)}\}$

Solución

Descomponiendo en fracciones parciales.

$$\frac{1}{s^2(s^2+9)}=\frac{1}{9}(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+9}),\text{ entonces}$$

$$\frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)}=\frac{1}{9}[\frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2}-\frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2+9}]$$

$$=\frac{1}{9}[2s+10+\frac{8}{s}+\frac{40}{s^2}-(2s+10-\frac{10s+50}{s^2+9})]$$

$$=\frac{1}{9}[\frac{8}{s}+\frac{40}{s^2}+\frac{10s}{s^2+9}+\frac{50}{s^2+9}]$$

$$L^{-1}\{\frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)}\}=\frac{1}{9}L^{-1}\{\frac{8}{s}+\frac{40}{s^2}+\frac{10s}{s^2+9}+\frac{50}{s^2+9}\}$$

$$=\frac{1}{9}(8+40t+10\cos 3t+\frac{50}{3}\operatorname{sen}3t)$$

$$\therefore\quad L^{-1}\{\frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)}\}=\frac{1}{27}(24+120t+30\cos 3t+50\operatorname{sen}3t)$$

4) Calcular $L^{-1}\{\frac{2s^2-9s+19}{(s-1)^2(s+3)}\}$

Solución

Descomponiendo en fracciones parciales se tiene:

$$\frac{2s^2-9s+19}{(s-1)^2(s+3)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s+1)^2}+\frac{C}{s+3}=\frac{A(s-1)(s+3)+B(s+3)+C(s-1)^2}{(s-1)^2(s+3)}$$

$$2s^2-9s+19=A(s^2+2s-3)+B(s+3)+C(s^2-2s+1)$$

$$=(A+C)s^2+(2A+B-2C)s$$

$$\begin{cases} A+C=2 \\ -2A+3B+C=19 \\ -3A+3B+C=19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=3 \\ C=4 \end{cases}$$

$$\frac{2s^2-9s+19}{(s-1)^2(s+3)}=-\frac{2}{s-1}+\frac{3}{(s-1)^2}+\frac{4}{s+3}$$

$$L^{-1}\{\frac{2s^2-9s+19}{(s-1)^2(s+3)}\}=L^{-1}\{-\frac{2}{s-1}+\frac{3}{(s-1)^2}+\frac{4}{s+3}\}$$

$$=-2\,L^{-1}\{\frac{1}{s-1}\}+3\,L^{-1}\{\frac{1}{(s-1)^2}\}+4L^{-1}\{\frac{1}{s+3}\}$$

$$=-2e^t+3t\,e^t+4e^{-3t}$$

5) Hallar $L^{-1}\{\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}\}$

Solución

Descomponiendo en fracciones parciales se tiene:

$$\frac{2s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}=\frac{As+B}{s^2+2s+2}+\frac{Cs+D}{s^2+2s+5}$$

$$=\frac{(As+B)(s^2+2s+5)+(Cs+D)(s^2+2s+2)}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}$$

$$s^2+2s+3=A(s^3+2s^2+5s)+B(s^2+2s+5)+C(s^3+2s^2+2s)+D(s^2+2s+2)$$

$$=(A+C)s^3+(2A+B+2C+D)s^2+(5A+2B+2C+2D)s+5B+2D$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 2A+B+2C+D=1 \\ 5A+2B+2C+2D=2 \\ 5B+2D=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A=0 \\ B=\frac{1}{3} \\ C=0 \\ D=\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}=\frac{\frac{1}{3}}{s^2+2s+2}+\frac{\frac{2}{3}}{s^2+2s+5}$$

$$L^{-1}\{\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}\}=L^{-1}\{\frac{\frac{1}{3}}{s^2+2s+2}+\frac{\frac{2}{3}}{s^2+2s+5}\}$$

$$=\frac{1}{3}L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\}+\frac{1}{3}L^{-1}\{\frac{2}{(s+1)^2+4}\}$$

$$=\frac{1}{3}e^{-t}\operatorname{sen} t+\frac{1}{3}e^{-t}\operatorname{sen} 2t$$

6) Calcular $L^{-1}\{\frac{1}{s^5+4s^4+13s^3+62s^2+149s+130}\}$

<u>Solución</u>

factorizando el denominador se tiene:

$$s^5+4s^4+14s^3+62s^2+149s+130=(s+2)(s^2-2s+13)(s^2+4s+5)$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^5+4s^4+13s^3+62s^2+149s+130}\}=L^{-1}\{\frac{A}{s+2}+\frac{Bs+C}{s^2-2s+13}+\frac{Ds+E}{s^2+4s+5}\}$$

$$=\frac{1}{4578}L^{-1}\{\frac{218}{s+2}-\frac{8s+81}{(s-1)^2+12}+\frac{226s+515}{(s+2)^2+1}\}$$

$$=\frac{1}{4578}(218e^{-2t}-e^{t}L^{-1}\{\frac{8s+89}{s^2+12}\}+e^{-2t}L^{-1}\{\frac{226s+63}{s^2+1}\})$$

$$=\frac{1}{4518}(218e^{-2t}-8e^{t}\cos\sqrt{2}t-\frac{89}{\sqrt{12}}\operatorname{sen}\sqrt{12}t+226e^{-2t}\cos t+63e^{-2t}\operatorname{sen} t)$$

7) Hallar $L^{-1}\{\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\}$

<u>Solución</u>

aplicando la fórmula de HEAVISIDE.

$P(s)=2s^2-4$ y $Q(s)=(s+1)(s-2)(s-3)$

para $Q(s)=0$, se tiene $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=2$, $\alpha_3=3$

$$Q(s)=s^3-4s^2+s+6 \Rightarrow Q'(s)=3s^2-8s+1$$

$$L^{-1}\{\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\}=\frac{P(-1)}{Q'(-1)}e^{-t}+\frac{P(2)}{Q'(2)}e^{2t}+\frac{P(3)}{Q'(3)}e^{3t}$$

$$=-\frac{2}{12}e^{-t}+\frac{4}{-3}e^{2t}+\frac{14}{4}e^{3t}=-\frac{e^{-t}}{6}-\frac{4}{3}e^{2t}+\frac{7}{2}e^{3t}$$

8) Calcular $L^{-1}\{\frac{19s+37}{(s-2)(s+1)(s+3)}\}$

Solución

aplicando la fórmula de HEAVISIDE.

P(s) = 19s + 37 y Q(s) = (s -2)(s + 1)(s + 3)

como Q(s) = 0, entonces $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 2$

$$Q(s) = s^3 + 2s^2 - 5s - 6 \Rightarrow Q'(s) = 3s^2 + 4s - 5$$

$$Q'(-3) = -10\,,\quad Q'(-1) = -6\,,\quad Q'(2) = 15$$

P(-3) = -20 , P(-1) = 18 , P(2) = 75

$$L^{-1}\{\frac{19s+37}{(s-2)(s+1)(s+3)}\} = L^{-1}\{\frac{P(-3)}{Q'(-3)(s+3)} + \frac{P(-1)}{Q'(-1)(s+1)} + \frac{P(2)}{Q'(2)(s-2)}\}$$

$$= 2e^{-3t} - 3e^{-t} + 5e^{2t}$$

9) Calcular $L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\}$

Solución

Aplicando el teorema de convolución se tiene:

$L^{-1}\{f(s).g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u)du = F*G$, donde f(s) = L{F(t)} y g(s) = L{G(t)}

$L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\} = L^{-1}\{(\frac{1}{s+1})(\frac{1}{s^2+1})\}$, donde

$$\begin{cases} f(s) = \dfrac{1}{s+1} \\ g(s) = \dfrac{1}{s^2+1} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} F(t) = L^{-1}\{\dfrac{1}{s+1}\} = e^{-t} \\ G(t) = L^{-1}\{\dfrac{1}{s^2+1}\} = \operatorname{sen} t \end{array}$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\}=\int_0^t F(u)G(t-u)du=\int_0^t e^{-u}.\text{sen}(t-u)du$$

$$=\int_0^t e^{-u}(\text{sen}\,t\cos u-\cos t\,\text{sen}\,u)du$$

$$=\text{sen}\,t\int_0^t e^{-u}\cos u\,du-\cos t\int_0^t e^{-u}\,\text{sen}\,u\,du$$

$$=\text{sen}\,t(\frac{-e^{-u}\cos u+e^{-u}\,\text{sen}\,u}{2})\Big/_0^t-\cos t(\frac{-e^{-u}\,\text{sen}\,u-e^{-u}\cos u}{2})\Big/_0^t$$

$$=\frac{e^{-t}\,\text{sen}\,t}{2}(\text{sen}\,t-\cos t)+\frac{\text{sen}\,t}{2}+\frac{e^{-t}\cos t}{2}(\text{sen}\,t+\cos t)-\frac{\cos t}{2}$$

$$=\frac{e^{-t}}{2}+\frac{\text{sen}\,t-\cos t}{2}$$

$$\therefore\quad L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\}=\frac{e^{-t}+\text{sen}\,t-\cos t}{2}$$

10) Calcular $L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\}$

Solución

Aplicando el teorema de convolución.

$$L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\}=L^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}.\frac{1}{s^2+1}\},\ \text{de donde}$$

$$\begin{cases} g(s)=\dfrac{s}{s^2+1} \\ f(s)=\dfrac{1}{s^2+1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} G(t)=L^{-1}\{\dfrac{s}{s^2+1}\}=\cos t \\ F(t)=L^{-1}\{\dfrac{1}{s^2+1}\}=\text{sen}\,t\end{cases}$$

$$L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\} = \int_0^t F(u)G(t-u)du = \int_0^t \operatorname{sen} u.\cos(t-u)du$$

$$= \int_0^t \operatorname{sen} u.(\cos t \cos u + \operatorname{sen} t \operatorname{sen} u)du$$

$$= \cos t \int_0^t \operatorname{sen} u \cos u\, du + \operatorname{sen} t \int_0^t \operatorname{sen}^2 u\, du$$

$$= \cos t(\frac{\operatorname{sen}^2 u}{2}) \Big/_0^t + \operatorname{sen} t(\frac{u}{2} - \frac{\operatorname{sen} u \cos u}{2}) \Big/_0^t$$

$$= \frac{\cos t \operatorname{sen}^2 t}{2} + \frac{t \operatorname{sen} t}{2} - \frac{\operatorname{sen}^2 t \cos t}{2} = \frac{t \operatorname{sen} t}{2}$$

$$\therefore \quad L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\} = \frac{t \operatorname{sen} t}{2}$$

11) Dado $a > 0$ y $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, probar que: $L^{-1}\{f(as)\} = \frac{1}{a} F(\frac{t}{a})$

Solución

Sea $k = \frac{1}{a} \Rightarrow L\{F(kt)\} = \frac{1}{k} f(\frac{s}{k})$

$$L\{F(\frac{t}{a})\} = a\, f(as) \Rightarrow F(\frac{t}{a}) = a\, L^{-1}\{f(as)\}$$

$$\therefore \quad L^{-1}\{f(as)\} = \frac{1}{a} F(\frac{t}{a})$$

12) Hallar $L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+a^2)^3}\}$

Solución

Aplicando la propiedad siguiente.

Si $L^{-1}\{f(s)\} = F(t) \Rightarrow L^{-1}\{f(s)\} = -\frac{1}{t} L^{-1}\{f'(s)\}$

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\} = -\frac{1}{t} L^{-1}\{\frac{-4s}{(s^2+a^2)^3}\},\ \text{de donde}$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+a^2)^3}\} = \frac{t}{4} L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\} \qquad \ldots (1)$$

aplicando el teorema de convolución

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\} = L^{-1}\{\frac{1}{s^2+a^2}.\frac{1}{s^2+a^2}\},\ \text{de donde}$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^2+a^2}\} = \frac{\operatorname{sen} at}{a} = F(t)$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^2+a^2}\} = \frac{\operatorname{sen} at}{a} = G(t)$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\} = \int_0^t F(u)G(t-u)du = \int_0^t \frac{\operatorname{sen} au}{a}.\frac{\operatorname{sen} a(t-u)}{a}du$$

$$= \frac{1}{a^2}\int_0^t \operatorname{sen} au(\operatorname{sen} at \cos au - \cos at \operatorname{sen} au)du$$

$$= \frac{1}{a^2}[\operatorname{sen} at \int_0^t \operatorname{sen} au \cos au\, du - \cos at \int_0^t \operatorname{sen}^2 au\, du]$$

$$= \frac{1}{a^2}[\operatorname{sen} at.\frac{\operatorname{sen}^2 au}{2a} - \cos at.(\frac{u}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2au}{4a})] \Big/_0^t$$

$$= \frac{1}{a^2}[\frac{\operatorname{sen}^3 at}{2a} - \frac{t\cos at}{2} + \frac{\cos^2 at.\operatorname{sen} at}{2a}] = \frac{1}{a^2}[\frac{\operatorname{sen} at}{2a} - \frac{t\cos at}{2}]$$

$$= \frac{1}{2a^3}(\text{sen}\, at - at\cos at) \qquad \ldots (3)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+a^2)^3}\} = \frac{t}{8a^3}(\text{sen}\, at - at\cos at)$$

13) Hallar $L^{-1}\{\ln(\frac{s^2+1}{s(s+3)})\}$

Solución

$$L^{-1}\{\ln(\frac{s^2+1}{s(s+3)})\} = L^{-1}\{\ln(s^2+1) - \ln s - \ln(s+3)\}$$

aplicando la propiedad siguiente.

$$L^{-1}\{f(s)\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\{f'(s)\}$$

$$L^{-1}\{\ln(\frac{s^2+1}{s(s+3)})\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\{\frac{2s}{s^2+1} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s+3}\}$$

$$L^{-1}\{\ln(\frac{s^2+1}{s(s+3)})\} = -\frac{1}{t}(2\cos t - 1 - e^{-3t}) = \frac{1+e^{-3} - 2\cos t}{t}$$

14) Calcular $L^{-1}\{\ln(1+\frac{k^2}{s^2})\}$

Solución

$$L^{-1}\{\ln(1+\frac{k^2}{s^2})\} = L^{-1}\{\ln(s^2+k^2) - \ln s^2\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\{\frac{2s}{s^2+k^2} - \frac{2}{s}\}$$

$$= -\frac{1}{t}[2\cos kt - 2] = \frac{2-2\cos kt}{t}$$

$$\therefore \quad L^{-1}\{\ln(1+\frac{k^2}{s^2})\} = \frac{2-2\cos kt}{t}$$

15) Calcular $L^{-1}\{\ln(1+\frac{1}{s^3})\}$

Solución

$$L^{-1}\{\ln(1+\frac{1}{s^3})\} = L^{-1}\{\ln(s^3+1)\} - 3L^{-1}\{\ln s\}$$

$$= -\frac{1}{t}L^{-1}\{\frac{3s^2}{s^3+1}\} - 3L^{-1}\{\frac{1}{s}\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\{\frac{1}{s+1}+\frac{2s-1}{s^2-s+1}-\frac{3}{s}\}$$

$$= -\frac{1}{t}(e^{-t}+2e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-3) = \frac{3-2e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-e^{-t}}{t}$$

$$\therefore \quad L^{-1}\{\ln(1+\frac{1}{s^3})\} = \frac{3-2e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-e^{-t}}{t}$$

16) Calcular $L^{-1}\{\frac{1}{s}\ln(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2})\}$

Solución

$$L^{-1}\{\ln(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2})\} = L^{-1}\{\ln(s^2+a^2)-\ln(s^2+b^2)\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\{\frac{2s}{s^2+a^2}-\frac{2s}{s^2+b^2}\}$$

$$= -\frac{1}{t}(2\cos at - 2\cos bt) = \frac{2\cos bt - 2\cos at}{t}$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s}\ln(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2})\} = \int_0^t \frac{2(\cos bu - \cos au)}{u}\,du$$

17) Calcular $L^{-1}\{\ln\frac{(s+a)(s^2+c^2)}{(s+b)(s-c)^2}\}$

Solución

$$L^{-1}\{\ln\frac{(s+a)(s^2+c^2)}{(s+b)(s-c)^2})\} = L^{-1}\{\ln(s+a)+\ln(s^2+c^2)-\ln(s+b)-2\ln(s-c)\}$$

$$= -\frac{1}{t}L^{-1}\{\frac{1}{s+a}+\frac{2s}{s^2+c^2}-\frac{1}{s+b}-\frac{2}{s-c}\}$$

$$= -\frac{1}{t}(e^{-at}+2\cos ct-e^{-bt}-2e^{ct})$$

$$= \frac{e^{-bt}+2e^{ct}-e^{-at}-2\cos ct}{t}$$

18) Evaluar $L^{-1}\{\frac{e^{-4s}}{(s+2)^2}\}$

Solución

Utilizando la propiedad siguiente:

Si $L^{-1}\{f(s)\} = F(t) \Rightarrow L^{-1}\{e^{-as}f(s)\} = G(t)$ donde

$$G(t) = \begin{cases} F(t-a) & \text{para } t > a \\ 0 & \text{para } t < a \end{cases}$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s+2)^2}\} = e^{-2t}L^{-1}\{\frac{1}{s^2}\} = t\,e^{-2t} = F(t)$$

$$L^{-1}\{\frac{e^{-4s}}{(s+2)^2}\} = \begin{cases} F(t-4) & , t > 4 \\ 0 & , t < 4 \end{cases}$$

$$L^{-1}\{\frac{e^{-4s}}{(s+2)^2}\}=F(t-4).\mu(t-4)=(t-4)e^{-2(t-4)}\mu(t-4)$$

$$\therefore\quad L^{-1}\{\frac{e^{-4s}}{(s+2)^2}\}=(t-4)e^{-2(t-4)}\mu(t-4)$$

19) Calcular $L^{-1}\{\frac{1}{s^3(1-e^{-2s})}\}$

Solución

Como $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+...$, para $|x|<1$

$$\frac{1}{1-e^{-2s}}=1+e^{-2s}+e^{-4s}+...+e^{-2ns}+...$$

$$\frac{1}{1-e^{-2s}}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2ns}\Rightarrow\frac{1}{s^3(1-e^{-2s})}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-2ns}}{s^3}$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^3(1-e^{-2s})}\}=L^{-1}\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-2ns}}{s^3}\}=\sum_{n=0}^{\infty}L^{-1}\{\frac{e^{-2ns}}{s^3}\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}F(t-2n).\mu(t-2n)\text{, donde}$$

$$F(t)=L^{-1}\{\frac{1}{s^3}\}=\frac{t^2}{2}\Rightarrow F(t-2n)=\frac{(t-2n)^2}{2}$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s^3(1-e^{-2s})}\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-2n)^2}{2}\mu(t-2n)$$

20) Hallar $L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}\}$

Solución

como $L^{-1}\{J_0(at)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$, derivando $L\{\frac{d}{da}J_0(at)\} = -\frac{a}{(s^2+a^2)^{3/2}}$

$L\{t\,J_0'(at)\} = -\frac{a}{(s^2+a^2)^{3/2}}$, tomando la inversa

$t\,J_0'(at) = -a\,L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}\}$ de donde

$$L\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}\} = -\frac{t\,J_0'(at)}{a} = \frac{t\,J_1(at)}{a}$$

$$\therefore \quad L\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}\} = \frac{t\,J_1(at)}{a}$$

21) Calcular $F(t) = L^{-1}\{\frac{1}{s^3\cosh(2s)}\}$ y F(12)

Solución

$$\cosh 2s = \frac{e^{2s}+e^{-2s}}{2} \Rightarrow \frac{1}{\cosh 2s} = \frac{2}{e^{2s}+e^{-2s}} = \frac{2e^{-2s}}{1+e^{-4s}}$$

$$\frac{1}{s^3\cosh 2s} = \frac{2e^{-2s}}{s^3(1+e^{-4s})} = \frac{2e^{-2s}}{s^3}(1-e^{-4s}+e^{-8s}-e^{-12s}+\ldots) = \frac{2e^{-2s}}{s^3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-4ns}$$

$$= \frac{2}{s^3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-(4n+2)s} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{e^{-(4n+2)s}}{s^3}$$

$$F(t)=L^{-1}\{\frac{1}{s^3\cosh 2s}\}=2L^{-1}\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{-(4n+2)s}}{s^3}\}$$

$$F(t)=L^{-1}\{\frac{1}{s^3\cosh 2s}\}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n L^{-1}\{\frac{e^{-(4n+2)s}}{s^3}\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(t-4n-2)^2\,\mu(t-4n-2) \quad \text{de donde}$$

$$F(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } t<4n+2 \\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(t-4n-2)^2 & \text{si } t>4n+12 \end{cases}$$

ahora $F(12)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(12-4n-2)^2=10^2-6^2+2^2=68$

puesto que $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(12-4n-2)^2$, $12>4n+2$

22) Calcular $L^{-1}\{\frac{\exp(\frac{a}{s})}{s^{n+1}}\}$

Solución

$$\exp(ax)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m x^m}{m!}=e^{ax} \Rightarrow e^{a/s}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!s^m}$$

$\frac{\exp(a/s)}{s^{n+1}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!s^{m+n+1}}$, se tiene:

$$L^{-1}\{\frac{\exp(a/s)}{s^{n+1}}\}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!}L^{-1}\{\frac{1}{s^{m+n+1}}\}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m t^{m+n}}{m!(m+n)!}$$

$$= (\frac{t}{a})^{n/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{at})^{2m+n}}{m!(m+n)!} = (\frac{t}{a})^{n/2} I_n(2\sqrt{at})$$

donde $I_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(m+n)!} (\frac{t}{2})^{2m+n}$ función de Bessel modificada.

23) Calcular $L^{-1}\{\frac{2e^{3-\frac{3s}{2}} \operatorname{senh}(3+s/2)}{(s+6)^{9/2}}\}$

Solución

$$2e^{3-\frac{3s}{2}} \operatorname{senh}(3+\frac{s}{2}) = 2e^{3-\frac{3s}{2}} (\frac{e^{3-\frac{s}{2}} - e^{-3-\frac{s}{2}}}{2}) = e^{6-s} - e^{-2s}$$

$$L^{-1}\{\frac{2e^{3-\frac{3s}{2}} \operatorname{senh}(3+s/2)}{(s+6)^{9/2}}\} = L^{-1}\{\frac{e^{6-s} - e^{-2s}}{(s+6)^{9/2}}\}$$

$$= e^{6} L^{-1}\{\frac{e^{-s}}{(s+6)^{9/2}}\} - L^{-1}\{\frac{e^{-2s}}{(s+6)^{9/2}}\} \qquad \ldots (1)$$

$$L^{-1}\{\frac{e^{-2s}}{(s+6)^{9/2}}\} = e^{-6t} L^{-1}\{\frac{1}{s^{9/2}}\} = e^{-6t} . \frac{t^{7/2}}{\Gamma(9/2)} = \frac{16e^{-6t} . t^{7/2}}{105\sqrt{\pi}} \qquad \ldots (2)$$

$$L^{-1}\{\frac{2e^{3-\frac{3s}{2}} \operatorname{senh}(3+s/2)}{(s+6)^{9/2}}\} = e^{-6} \frac{16e^{-6(t-1)}(t-1)^{7/2}}{105\sqrt{\pi}} \mu(t-1) - \frac{16e^{-6(t-2)}(t-2)^{7/2}}{105\sqrt{\pi}} \mu(t-2)$$

$$L^{-1}\{\frac{2e^{3-\frac{3s}{2}} \operatorname{senh}(3+s/2)}{(s+6)^{9/2}}\} = [e^{12-6t}(t-1)^{7/2} \mu(t-1) - e^{12-6t}(t-2)^{7/2} \mu(t-2)] \frac{16}{105\sqrt{\pi}}$$

24) Calcular $L^{-1}\{\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{\sqrt{s}}\}$

Solución

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^{-\frac{1}{s}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!s^n}$$

$$\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{\sqrt{s}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!s^{n+\frac{1}{2}}}$$ entonces se tiene:

$$L^{-1}\{\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{\sqrt{s}}\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}L^{-1}\{\frac{1}{s^{n+\frac{1}{2}}}\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{n-\frac{1}{2}}}{n!\Gamma(n+\frac{1}{2})}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{n-\frac{1}{2}}}{n!\frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}.n!}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}t^{n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2\sqrt{t})^{2n}}{\sqrt{\pi t}(2n)!}=\frac{\cos(2\sqrt{t})}{\sqrt{\pi t}}$$

$$\therefore \quad L^{-1}\{\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{\sqrt{s}}\}=\frac{\cos(2\sqrt{t})}{\sqrt{\pi t}}$$

25) Calcular $L^{-1}\{\frac{1}{s}J_0(\frac{2}{\sqrt{s}})\}$

Solución

por definición de la función $J_0(t)$ se tiene:

$$J_0(t)=1-\frac{t^2}{2^2}+\frac{t^4}{2^2.4^2}-\frac{t^6}{2^2.4^2.6^2}+\dots$$

$$J_0(\frac{2}{\sqrt{s}})=1-\frac{2^2}{2^2 s}+\frac{2^4}{2^2.4^2 s^2}-\frac{2^6}{2^2.4^2.6^2.s^3}+\dots$$

$$\frac{1}{s}J_0(\frac{2}{\sqrt{s}})=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{2^2.s^5}-\frac{1}{6^2 s^4}+\frac{1}{24^2.s^5}-\dots$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{(2!)^2 s^3}-\frac{1}{(3!)^2 s^4}+\frac{1}{(4!)^2 s^5}-\dots$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s}J_0(\frac{2}{\sqrt{s}})\}=1-t+\frac{t^2}{(2!)^3}-\frac{t^3}{(3!)^3}+\frac{t^4}{(4!)^4}-...+\frac{(-1)^n t^n}{(n!)^3}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{(n!)^3}$$

26) Calcular $L^{-1}\{\frac{8s+5}{(s+1)(s^2+4s+5)(1-e^{-9s})}\}$

Solución

$$\frac{8s+5}{(s+1)(s^2+4s+5)}=\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2+4s+5}=-\frac{3}{2}.\frac{1}{s+1}-\frac{1}{2}.\frac{3s+25}{s^2+4s+5}$$

$$=-\frac{3}{2}(\frac{1}{s+1})-\frac{1}{2}(\frac{3(s+2)+19}{(s+2)^2+1})$$

$$L^{-1}\{-\frac{3}{2}(\frac{1}{s+1})-\frac{1}{2}(\frac{3(s+2)+19}{(s+2)^2+1})\}=-\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{3}{2}e^{-t}\cos t-\frac{19}{2}e^{-2t}\operatorname{sen} t$$

$$=-\frac{1}{2}(3e^{-t}+3e^{-2t}\cos t+e^{-2t}\operatorname{sen} t)$$

$$\frac{1}{1-e^{-3s}}=1+e^{-3s}+e^{-6s}+...+e^{-3ns}+...=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-3ns}$$

$$L^{-1}\{\frac{8s+5}{(s+1)(s^2+4s+5)(1-e^{-9s})}\}=L^{-1}\{(-\frac{3}{2(s+1)}-\frac{1}{2}(\frac{3s+25}{s^2+4s+5}))\sum_{n=0}^{\infty}e^{-3ns}\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{3}{2}L^{-1}\{\frac{e^{-3ns}}{s+1}\}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}L^{-1}\{\frac{(3s+25)e^{-3ns}}{s^2+4s+5}\}$$

$$=-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-t}L^{-1}\{\frac{e^{-3ns+3n}}{s}\}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2t}L^{-1}\{\frac{(3s+19)e^{-3ns+6n}}{s^2+1}\}$$

$$=-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-t+3n}L^{-1}\{\frac{e^{-3ns}}{s}\}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2(t-3n)}L^{-1}\{\frac{3s+19}{s^2+1}e^{-3ns}\}$$

$$= -\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(t-3n)}\mu(t-3n) - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2(t-3n)}[3\cos t + 19\,\mathrm{sen}\, t]\mu(t-3n)$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} [3e^{-(t-3n)} - e^{-2(t-3n)}(3\cos t + 19\,\mathrm{sen}\, t)]\mu(t-3n)$$

27) Hallar $L^{-1}\{\frac{e^{-6s}}{s}\operatorname{arctg}(s^2+4s+4)\}$

Solución

Sea $f(s) = \operatorname{arctg}(s^2+4s+4) \Rightarrow f'(s) = \frac{2s+4}{(s+2)^4+1}$

$$L^{-1}\{f(s)\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\{f'(s)\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\{\frac{2s+4}{(s+2)^4+1}\}$$

$$= -\frac{1}{t}e^{-2t}L^{-1}\{\frac{2s}{s^4+1}\} = -\frac{e^{-2t}}{t}L^{-1}\{\frac{2s}{(s^2+\sqrt{2}s+1)(s^2-\sqrt{2}s+1)}\}$$

$$= -\frac{e^{-2t}}{t}L^{-1}\{\frac{As+B}{s^2-\sqrt{2}s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+\sqrt{2}s+1}\}$$

$$= -\frac{e^{-2t}}{t}L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{2}}[\frac{1}{(s-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} - \frac{1}{(s+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}]\}$$

$$= -\frac{e^{-2t}}{2t}[e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\,\mathrm{sen}(\frac{1}{\sqrt{2}}t) - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\,\mathrm{sen}(\frac{t}{\sqrt{2}})]$$

$$= -\frac{e^{-2t}}{2t}\,\mathrm{sen}(\frac{t}{\sqrt{2}})[\frac{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}}{2}] = -\frac{e^{-2t}}{t}\,\mathrm{sen}(\frac{t}{\sqrt{2}})\,\mathrm{senh}\frac{\sqrt{2}}{2}t$$

$$L^{-1}\{\operatorname{arctg}(s^2+4s+4)\}=-\frac{e^{-2t}\operatorname{sen}(\frac{t}{\sqrt{2}})\operatorname{senh}\frac{\sqrt{2}}{2}t}{t}$$

$$L^{-1}\{\frac{e^{-6s}}{s}\operatorname{arctg}(s^2+4s+4)\}=\int_0^t\frac{-e^{-2(u-6)}\operatorname{sen}(\frac{u-6}{\sqrt{2}})\operatorname{senh}\frac{\sqrt{2}}{2}(u-6)}{u-6}\mu(u-6)du$$

28) Calcular $L^{-1}\{\frac{4-e^{-bs}}{s^4(4+2e^{-bs})}\}$ y halle el dominio de existencia de F(t).

Solución

$$\frac{4-e^{-bs}}{s^4(4+2e^{-bs})}=\frac{4-e^{-bs}}{4s^4(1+\frac{e^{-bs}}{2})}=\frac{4-e^{-bs}}{4s^4}(1-\frac{e^{-bs}}{2}+\frac{e^{-2bs}}{4}-\frac{e^{-3bs}}{8}+\dots)$$

$$=\frac{4-e^{-bs}}{4s^4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{-nbs}}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4-e^{-bs}}{4s^4}(-1)^n\frac{e^{-nbs}}{2^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(\frac{e^{-nbs}}{s^4}-\frac{e^{-(n+1)bs}}{4s^4})$$

$$L^{-1}\{\frac{4-e^{-bs}}{s^4(4+2e^{-bs})}\}=L^{-1}\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(\frac{e^{-nbs}}{s^4}-\frac{e^{-(n+1)s}}{4s^4})\}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}L^{-1}\{\frac{4e^{-nbs}}{s^4}-\frac{e^{-(n+1)s}}{4s^4}\}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}[\frac{4(t-nb)^3}{6}\mu(t-nb)-\frac{(t-(n+1)b)^3}{6}\mu(t-(n+1)b)]$$

$$= \frac{1}{24}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}[4(t-nb)^3\mu(t-nb)-(t-(n+1)b)^3\mu(t-(n+1)b)]$$

y F(t) existe en nb < t < (n + 1)b

29) Demostrar que: $J_0(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}e^{itw}(1-w^2)^{-1/2}dw$

Solución

$$L\{J_0(t)\}=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{s+i}}.\frac{1}{\sqrt{s-i}}$$

aplicando el teorema de convolución se tiene:

$$L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s+i}}\}=\frac{t^{-1/2}e^{-it}}{\sqrt{\pi}} \quad ; \quad L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s-i}}\}=\frac{t^{-1/2}e^{it}}{\sqrt{\pi}}$$

$$J_0(t)=L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\}=L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s+i}}.\frac{1}{\sqrt{s-i}}\}=\int_0^t\frac{u^{-1/2}e^{-iu}}{\sqrt{\pi}}.\frac{(t-u)^{-1/2}e^{i(t-u)}}{\sqrt{\pi}}du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^t e^{i(t-2u)}u^{-1/2}(t-u)^{-1/2}du$$

Sea u = tv $\Rightarrow$ du = t dv , cuando $u\to 0$; $v\to 0$

$u\to t$; $v\to 1$

$$J_0(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^t e^{i(t-2u)}u^{-1/2}(t-u)^{-1/2}du=\frac{1}{\pi}\int_0^t e^{i(t-2tv)}v^{-1/2}(i-v)^{-1/2}dv$$

$$J_0(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^1 e^{it(1-2v)}v^{-1/2}(1-v)^{-1/2}dv$$

ahora hacemos $w=1-2v \Rightarrow dv=-\frac{dw}{2}$

cuando v $\to 0$, w $\to 1$ y cuando v $\to 1$, w $\to -1$

$$J_0(t)=\frac{1}{\pi}\int_1^{-1} e^{itw}(\frac{1-w}{2})^{-1/2}(\frac{1+w}{2})^{-1/2}(-\frac{dw}{2})$$

$$\therefore \quad J_0(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} e^{itw}(1-w^2)^{-1/2}dw$$

30) Demostrar que: $J_0(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t\cos\theta)d\theta$

Solución

Sea $w=\cos\theta \Rightarrow$ cuando $\begin{cases}\theta=0 \ , & w=1\\ \theta=\pi \ , & w=-1\end{cases}$

utilizando el ejercicio 28) se tiene.

$$J_0(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} e^{itw}(1-w^2)^{-1/2}dw=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} e^{it\cos\theta}(1-\cos^2\theta)^{-1/2}(-\operatorname{sen}\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{it\cos\theta}d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(t\cos\theta)+i\operatorname{sen}(t\cos\theta)]d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t\cos\theta)d\theta+\frac{i}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}(t\cos\theta)d\theta$$

igualando la parte real y la parte imaginaria se tiene:

$$J_0(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t\cos\theta)d\theta$$

31) Probar que $L^{-1}\{t^{-1/2}f_{er}(\sqrt{t})\}=\frac{2}{\sqrt{\pi s}}\operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{s}})$

Solución

Se conoce que: $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$, sea $x = u^2$

$e^{-u^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{n!}$, integrando de 0 a t.

$$\int_0^t e^{-u^2} du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^t u^{2n} du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n+1}}{n!(2n+1)} \Big/_0^t$$

$$\int_0^t e^{-u^2} du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

$$f_{er}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

$f_{er}(\sqrt{t}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n+\frac{1}{2}}}{n!(2n+1)}$, multiplicando por $t^{-1/2}$

$$t^{-1/2} f_{er}(\sqrt{t}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(2n+1)n!}$$

$$L\{t^{-1/2} f_{er}(\sqrt{t})\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} L\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(2n+1)n!}\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} L\{t^n\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)s^{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{\pi s}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)s^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi s}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)^{2n+1} = \frac{2}{\sqrt{\pi s}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)$$

$$\therefore \quad L\{t^{-1/2} f_{er}(\sqrt{t})\} = \frac{2}{\sqrt{\pi s}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)$$

32) Calcular $\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} xt}{x^2+1}dx$

Solución

Sea $F(t)=\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} xt}{x^2+1}dx$, tomando Transformada de Laplace

$$L\{F(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}(\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} tx}{x^2+1}dx)dt = \int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}(\int_0^\infty e^{-st} \operatorname{sen} xt\, dt)dx$$

$$=\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1} L\{\operatorname{sen} xt\}dx = \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+x^2)}$$

$$=\frac{1}{s^2-1}\int_0^\infty (\frac{s^2}{x^2+s^2}-\frac{1}{x^2+1})dx = \frac{1}{s^2-1}[s.\operatorname{arctg}\frac{x}{s}-\operatorname{arctg} x]\Big/_0^\infty$$

$$=\frac{1}{s^2-1}[\frac{s\pi}{2}-\frac{\pi}{2}]=\frac{\pi}{2}(\frac{1}{s+1})$$

Luego $L\{F(t)\}=L\{\int_0^\infty \frac{s \operatorname{sen} xt}{x^2+1}dx\}=\frac{\pi}{2}(\frac{1}{s+1})$ tomando la transformada inversa

$$F(t)=L^{-1}\{\frac{\pi}{2}(\frac{1}{s+1})\}=\frac{\pi}{2}e^{-t}$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} xt}{x^2+1}dx=\frac{\pi e^{-t}}{2}$$

33) Calcular $\int_0^\infty \cos x^2 dx$

Solución

Sea $F(t)=\int_0^\infty \cos tx^2 dx$, tomando transformada

$$L\{F(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^\infty \cos tx^2dx\right)dt=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-st}\cos tx^2dt\right)dx$$

$$=\int_0^\infty L\{\cos tx^2\}dx=\int_0^\infty \frac{s}{s^2+x^4}dx$$

sea $x^2=s\,\text{tg}\,\theta \Rightarrow 2x\,dx=s.\sec^2\theta\,d\theta$

cuando $x\to 0$; $\theta\to 0$, cuando $x\to\infty$, $\theta=\frac{\pi}{2}$

$$L\{F(t)\}=\int_0^\infty \frac{s\,dx}{s^2+x^4}=\int_0^{\pi/2}\frac{s^2.\sec^2\theta\,d\theta}{(s^2+s^2\,\text{tg}^2\,\theta)2\sqrt{s\,\text{tg}\,\theta}}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{s\,\text{tg}\,\theta}}=\frac{1}{2\sqrt{s}}\int_0^{\pi/2}\cos^{1/2}\theta.\text{sen}^{-1/2}\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{s}}\int_0^{\pi/2}\cos^{2(\frac{3}{4})-1}\theta\,\text{sen}^{2(\frac{1}{4})-1}\theta.d\theta=\frac{1}{2\sqrt{s}}.\frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{4})}{2\Gamma(\frac{3}{4}+\frac{1}{4})}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{s}}.\frac{\Gamma(1-\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{4})}{2}=\frac{1}{2\sqrt{s}}.\frac{\pi}{2.\text{sen}\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2\sqrt{s}}.\frac{\pi}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}\sqrt{s}}$$

$$F(t)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}L^{-1}\{s^{-1/2}\}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}t^{-1/2}=\frac{\pi}{2\sqrt{2t}}$$

$$\therefore\quad F(1)=\int_0^\infty \cos x^2dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

34) Calcular $\int_0^\infty \frac{\cos nx}{x^2+1}dx$

Solución

Sea $F(t)=\int_0^\infty \frac{\cos nxt}{x^2+1}dx$, tomando transformada

$$L\{F(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}(\int_0^\infty \frac{\cos nxt}{x^2+1}dx)dt=\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}(\int_0^\infty e^{-st}\cos nxt\,dt)dx$$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}L\{\cos nxt\}dx=\int_0^\infty (\frac{1}{x^2+1}.\frac{s}{s^2+n^2x^2})dx$$

$$=\int_0^\infty \frac{s\,dx}{(x^2+1)(s^2+n^2x^2)}=\int_0^\infty (\frac{s}{x^2+1}-\frac{sn^2}{s^2+n^2x^2})\frac{dx}{s^2-n^2}$$

$$=\frac{s}{s^2-n^2}[\operatorname{arctg} x-\frac{n}{s}\operatorname{arctg}\frac{nx}{2}]\Big/_0^\infty=\frac{s}{s^2-n^2}[\frac{\pi}{2}-\frac{n\pi}{2s}]=\frac{\pi s}{2(s^2-n^2)}(1-\frac{n}{s})$$

$$L\{F(t)\}=\frac{\pi(s-n)}{2(s+n)(s-n)}=\frac{\pi}{2(s+n)}$$

$$F(t)=L^{-1}\{\frac{\pi}{2(s+n)}\}=\frac{\pi}{2}e^{-nt}$$

$$\therefore\quad F(1)=\int_0^\infty \frac{\cos nx}{x^2+1}dx=\frac{\pi e^{-n}}{2}$$

35) Calcular $L^{-1}\{\frac{1}{s-\sqrt{s}}\}$

Solución

$$L^{-1}\{\frac{1}{s-\sqrt{s}}\}=L^{-1}\{\frac{s+\sqrt{s}}{s^2-s}\}=L^{-1}\{\frac{1}{s-1}+\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\}$$

$$=e^t+e^tL^{-1}\{\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\}=e^t+e^t[L^{-1}\{\frac{1}{s}.\frac{1}{\sqrt{s+1}}\}]$$

$$= e^t + e^t [L^{-1}\{\frac{1}{s}\} * L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s+1}}\}] = e^t + e^t [1 * \frac{e^t}{\sqrt{\pi t}}]$$

$$= e^t + e^t \int_0^t \frac{e^u}{\sqrt{\pi u}} du \quad , \quad v = \sqrt{u} \Rightarrow u = v^2 \Rightarrow du = 2v dv$$

$$u = 0 \,,\; v = 0 \,, u \to t \Rightarrow v = \sqrt{t}$$

$$= e^t + e^t [\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-v^2} dv] = e^t + e^t f_{er}(\sqrt{t}) = e^t (1 + f_{er}(t))$$

3.17. Ejercicios Propuestos.-

1) Hallar la Transformada Inversa de:

a) $L^{-1}\{\dfrac{2s-\pi}{s(s-\pi)}\}$ **b)** $L^{-1}\{\dfrac{s-a}{s(s+a)}\}$

c) $L^{-1}\{\dfrac{1}{s^2-5}+\dfrac{1}{s^{5/2}}\}$ **d)** $L^{-1}\{\dfrac{2s+3}{s^2+9}\}$

e) $L^{-1}\{\dfrac{1}{(s+2)^4}\}$ **f)** $L^{-1}\{\dfrac{2s^2+5s-4}{s^3+s^2-2s}\}$

g) $L^{-1}\{\dfrac{6s}{s^2+2s-6}\}$ **h)** $L^{-1}\{\dfrac{2s-6}{s^2-1}\}$

i) $L^{-1}\{\dfrac{5s-2}{3s^2+4s+2}\}$ **j)** $L^{-1}\{\dfrac{s+12}{s^2+4s}\}$

Rpta. **a)** $F(t)=2e^{\pi t}-2e^{\frac{\pi}{2}t}\operatorname{senh}\dfrac{\pi}{2}t$ **b)** $F(t)=e^{-at}-2e^{-\frac{a}{2}t}\operatorname{senh}\dfrac{at}{2}$

c) $F(t)=\dfrac{\operatorname{senh}(\sqrt{5}t)}{\sqrt{5}}+\dfrac{4t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}$ **d)** $F(t)=2\cos 3t+\operatorname{sen}3t$

e) $F(t)=e^{-2t}\dfrac{t^3}{6}$ **f)** $F(t)=2+e^t-e^{-2t}$

g) $F(t)=6e^{-t}\cosh\sqrt{7}t-\dfrac{6}{\sqrt{7}}e^{-t}\operatorname{senh}\sqrt{7}t$

h) $F(t)=2\cosh t-6\operatorname{senh}t$

i) $F(t)=\dfrac{5}{3}e^{-\frac{2}{3}t}\cosh\dfrac{\sqrt{2}}{3}t-\dfrac{16}{3\sqrt{2}}e^{-\frac{2}{3}t}\operatorname{senh}\dfrac{\sqrt{2}}{3}t$

j) $F(t)=e^{-2t}\cosh 2t+10e^{-2t}\operatorname{senh}2t$

2) Mediante fracciones parciales, hallar la transformada inversa de Laplace.

a) $L^{-1}\{\frac{s+3}{(s+1)(s-3)}\}$ **Rpta.** $F(t)=\frac{1}{2}(3e^{t}-e^{-t})$

b) $L^{-1}\{\frac{1}{s^2(s+1)}\}$ **Rpta.** $F(t)=t-1+e^{-t}$

c) $L^{-1}\{\frac{s+1}{9s^2+6s+5}\}$ **Rpta.** $F(t)=\frac{1}{9}e^{-t/3}(\frac{\cos 2t}{3}+\frac{\operatorname{sen} 2t}{3})$

d) $L^{-1}\{\frac{2s^2+1}{s(s+1)^2}\}$ **Rpta.** $F(t)=1+e^{-t}-3t\,e^{-t}$

e) $L^{-1}\{\frac{5s-2}{s(s+2)(s-1)}\}$ **Rpta.** $F(t)=1-2\,e^{-2t}+e^{t}$

f) $L^{-1}\{\frac{3s+16}{s^2-s-6}\}$ **Rpta.** $F(t)=5e^{3t}-2\,e^{-2t}$

g) $L^{-1}\{\frac{2s-1}{s^3-s}\}$ **Rpta.** $F(t)=1-\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{t}$

h) $L^{-1}\{\frac{s^3+16s-24}{s^4+20s^2+64}\}$ **Rpta.** $F(t)=\frac{\cos 2t}{3}-\operatorname{sen}2t+\frac{2}{3}\cos 4t+\frac{\operatorname{sen}4t}{2}$

i) $L^{-1}\{\frac{s^2-3}{(s-2)(s-3)(s^2+2s+5)}\}$

Rpta. $F(t)=-\frac{1}{13}e^{2t}+\frac{3}{10}e^{3t}-\frac{29}{30}e^{-t}\cos 2t+\frac{151}{390}e^{-t}\operatorname{sen}2t$

j) $L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\}$ **Rpta.** $F(t)=\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\operatorname{sen}t$

3) Mediante la formula de Hoaviside calcular la transformada inversa de Laplace.

a) $L^{-1}\{\frac{2s-11}{(s+2)(s-3)}\}$ **Rpta.** $F(t)=3e^{-2t}-e^{3t}$

b) $L^{-1}\{\frac{19s+37}{(s-2)(s+1)(s+3)}\}$ **Rpta.** $F(t)=5e^{2t}-3e^{-t}-2e^{-3t}$

c) $L^{-1}\{\frac{2s^2-6s+5}{s^3-6s^2+11s-6}\}$ **Rpta.** $F(t)=\frac{e^t}{2}-e^{2t}+\frac{5}{2}e^{3t}$

d) $L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\}$ **Rpta.** $F(t)=\frac{1}{2}(e^{-t}+\operatorname{sen}t-\cos t)$

e) $L^{-1}\{\frac{3s+16}{s^2-s-6}\}$ **Rpta.** $F(t)=5e^{3t}-2e^{-2t}$

f) $L^{-1}\{\frac{s+1}{6s^2+7s+2}\}$ **Rpta.** $F(t)=\frac{e^{-t/2}}{2}-\frac{1}{3}e^{-\frac{2t}{3}}$

g) $L^{-1}\{\frac{27-12s}{(s+4)(s^2+9)}\}$ **Rpta.** $F(t)=3e^{-4t}-3\cos 3t$

h) $L^{-1}\{\frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}\}$ **Rpta.** $F(t)=-\frac{4}{5}e^{-3t}+\frac{1}{5}e^{-t}(4\cos t-3\operatorname{sen}t)$

i) $L^{-1}\{\frac{s^2-3}{(s+2)(s-3)(s^2+2s+5)}\}$

Rpta. $F(t)=\frac{3e^{3t}}{50}-\frac{e^{-2t}}{25}-\frac{e^{-t}\cos 2t}{50}+\frac{9e^{-t}\operatorname{sen}2t}{25}$

j) $L^{-1}\{\frac{s}{(s^2-2s+2)(s^2+2s+2)}\}$ **Rpta.** $F(t)=\frac{1}{2}\operatorname{senh}t.\operatorname{sen}t$

4) Encontrar la transformada inversa de Laplace.

a) $L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\}$, $a^2\neq b^2$, $ab\neq 0$

b) $L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\}$, $a^2 \neq b^2$, $ab \neq 0$

c) $L^{-1}\{\frac{s^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\}$, $a^2 \neq b^2$, $ab \neq 0$

d) $L^{-1}\{\frac{1}{s(s^3+1)}\}$ **e)** $L^{-1}\{\frac{7s-1}{(s-3)(s+2)(s-1)}\}$

5) Hallar la transformada de Laplace, mediante el teorema de convolucion.

a) $L^{-1}\{\frac{1}{(s+3)(s-1)}\}$ **b)** $L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)^2(s-1)}\}$

c) $L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\}$ **d)** $L^{-1}\{\frac{1}{s^2(s+1)}\}$

e) $L^{-1}\{\frac{1}{(s+a)(s-b)}\}$, $a \neq b$ **f)** $L^{-1}\{\frac{3s^2}{(s^2+1)^2}\}$

g) $L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+1)^3}\}$ **h)** $L^{-1}\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\}$

i) $L^{-1}\{\frac{s}{(s^2+4)^3}\}$

6) Hallar la transformada inversa de Laplace de:

a) $L^{-1}\{\frac{s}{s^2+2s+5}\}$ **b)** $L^{-1}\{\frac{s}{s^2-6s+13}\}$

c) $L^{-1}\{\frac{s-5}{s^2-6s+13}\}$ **d)** $L^{-1}\{\frac{2s-1}{s^2+4s+29}\}$

e) $L^{-1}\{\frac{3s+1}{(s+1)^4}\}$

f) $L^{-1}\{\frac{s^2}{(s+2)^3}\}$

g) $L^{-1}\{\frac{2s^2-6s+5}{s^3-6s^2+11s-6}\}$

h) $L^{-1}\{\frac{3s-8}{s^2+4}-\frac{4s-24}{s^2-16}\}$

i) $L^{-1}\{\frac{2s-\pi}{s^3(s-\pi)}\}$

j) $L^{-1}\{\frac{s+1}{6s^2+7s+2}\}$

k) $L^{-1}\{\frac{s+2}{s^4-16s^2+100}\}$

l) $L^{-1}\{\frac{s+2}{(s+1)(s^2+4)}\}$

ll) $L^{-1}\{\frac{s+1}{(s^2+1)(s^2+4s+13)}\}$

m) $L^{-1}\{\frac{s}{(s+1)(s+2)^3}\}$

7) Hallar las siguientes Transformadas inversas.

a) $L^{-1}\{\frac{s^2-s+3}{s^3+6s^2+11s+6}\}$

b) $L^{-1}\{\frac{s}{s^4-2s^2+1}\}$

c) $L^{-1}\{\frac{s}{(s+2)^2(s^2+1)}\}$

d) $L^{-1}\{\frac{s+2}{(s+1)(s^2+4)}\}$

e) $L^{-1}\{\frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+3)}\}$

f) $L^{-1}\{\frac{27-12s}{(s+4)(s^2+9)}\}$

g) $L^{-1}\{\frac{1}{(s-1)^n}\}$, $n>0$

h) $L^{-1}\{\frac{2s}{(s^2+1)^2}\}$

i) $L^{-1}\{\frac{3s^2}{(s^2+1)^2}\}$

j) $L^{-1}\{\frac{1}{s^4+1}\}$

8) Si $L^{-1}\{\frac{1}{s^{n+1}}\}=\frac{t^n}{\Gamma(n+1)}$, n > -1, calcular:

a) $L^{-1}\{\frac{s}{(s+1)^{5/2}}\}$ **b)** $L^{-1}\{\frac{s}{s^{7/2}}\}$

c) $L^{-1}\{\frac{s+1}{s^{4/3}}\}$ **d)** $L^{-1}\{(\frac{\sqrt{s-1}}{s})^2\}$

e) $L^{-1}\{\frac{3s-2}{s^{5/2}}-\frac{7}{3s+2}\}$ **f)** $L^{-1}\{\frac{3(s^2-1)^2}{s^5}+\frac{4s-18}{9-s^2}+\frac{(s+1)(2-s^{1/2}}{s^{5/2}}\}$

9) Hallar la transformada inversa de Laplace.

a) $L^{-1}\{\frac{s^2+2s}{(s^2+2s+2)^2}\}$ **b)** $L^{-1}\{\frac{s^2-6s+7}{(s^2-4s+5)^2}\}$

c) $L^{-1}\{\frac{s^3+8s^2+22(s+1)}{(s^2+6s+10)^2}\}$ **d)** $L^{-1}\{\frac{s^3+3s^2-s-3}{(s^2+2s+5)^2}\}$

e) $L^{-1}\{\frac{2(s^3+2s^2-s-47}{(s^2+4s+13)^2}\}$ **f)** $L^{-1}\{\frac{2s^3-s^2-1}{(s+1)^2(s^2+1)^2}\}$

g) $L^{-1}\{\frac{s^2-10s-25}{s^3-25s}\}$ **h)** $L^{-1}\{\frac{s+1}{6s^2+7s+2}\}$

10) Hallar la Transformada inversa de Laplace de:

a) $L^{-1}\{\ln(\frac{s}{s-1})\}$ **b)** $L^{-1}\{\frac{1}{2}\ln(\frac{s^2}{s^2+1})\}$

c) $L^{-1}\{\ln(\frac{s+a}{s+b})\}$ **d)** $L^{-1}\{\ln(\frac{s^2+1}{s(s+1)})\}$

e) $L^{-1}\{\frac{1}{2}\ln(\frac{s^2-1}{s^2})\}$ **f)** $L^{-1}\{\frac{1}{2}\ln(\frac{s^2+1}{(s-1)^2})\}$

g) $L^{-1}\{\ln(\frac{s+3}{s+2})\}$ **h)** $L^{-1}\{\ln(\frac{s^2+1}{s(s+3)})\}$

i) $L^{-1}\{\frac{1}{s}\ln(\frac{s+2}{s+1})\}$ **j)** $L^{-1}\{\frac{1}{s}\ln(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2})\}$

k) $L^{-1}\{s\ln(\frac{s-1}{s+1})+2\}$ **l)** $L^{-1}\{\frac{1}{s^{10}}\ln(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2})\}$

ll) $L^{-1}\{\ln(\frac{(s+a)(s^2+c^2)}{(s+b)(s-c)^2})\}$

11) Hallar la transformada inversa de Laplace de

a) $L^{-1}\{\operatorname{arctg}(s+1)\}$ **b)** $L^{-1}\{\frac{1}{s}\operatorname{arctg}(\frac{1}{s})\}$

c) $L^{-1}\{\frac{1}{s}\cos(\frac{1}{s})\}$ **d)** $L^{-1}\{\operatorname{arctg}(\frac{2}{s^2})\}$

e) $L^{-1}\{\operatorname{arctg}(s+1)\}$ **f)** $L^{-1}\{\operatorname{arctg}(\frac{3}{s+2})\}$

g) $L^{-1}\{\frac{e^{-4s}}{s^2}\operatorname{arctg}(s^2+4s+4)\}$ **h)** $L^{-1}\{s^2\operatorname{arctg}(\frac{4}{s})\}$

12) Calcular la Transformada inversa de Laplace de:

a) $L^{-1}\{\frac{1}{s}(1+\frac{1}{s^3})^{-1/2}\}$ **b)** $L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s+1}}\}$

c) $L^{-1}\{\frac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s(s^2+1)}\}$ **d)** $L^{-1}\{e^{-3s-2\sqrt{s}}\}$

e) $L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s-1}}\}$ **f)** $L^{-1}\{\frac{1}{(s-1)\sqrt{s}}\}$

g) $L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{s+1}}\}$ **h)** $L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s^2+4s+13}}\}$

i) $L^{-1}\{\frac{e^{-3s}}{se^s+1}\}$ **j)** $L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s-a+b}}\}$

k) $L^{-1}\{e^{1/s}-1\}$ **l)** $L^{-1}\{e^{-1/s}-1\}$

m) $L^{-1}\{\frac{(s+3)e^{-s}}{4s^2+4s+9}\}$

13) Hallar la transformada inversa de Laplace de:

a) $L^{-1}\{\frac{s}{(s+1)(s+2)(s^2+1)(1-e^{-2s})}\}$ **b)** $L^{-1}\{\frac{1}{(s-1)(s+2)^2(1-e^{-2s})}\}$

c) $L^{-1}\{\frac{e^{-s}}{s(s^2+2s+5)(e^{-s}+1)}\}$ **d)** $L^{-1}\{\frac{3s+5}{(s+1)(s^2+4s+5)(1-e^{-3s})}\}$

14) Para a > 0. Demuéstrese que: de $L^{-1}\{f(s)\}=F(t)$ se sigue que $L^{-1}\{f(as+b)\}=\frac{1}{a}e^{-\frac{bt}{a}}F(\frac{t}{a})$

15) Dado $F(t)=L^{-1}\{\frac{3}{s^3\,\text{senh}(3s)}\}$, calcular F(10) **Rpta.** F(10) = 344

16) Verificar $L^{-1}\{\frac{1}{1+\sqrt{s}}\}=e^t(\frac{1}{\sqrt{\pi t e^t}}+f_{er}(\sqrt{t})-1)$

17) Verificar $L^{-1}\{\frac{e^{-s\sqrt{x}}}{\sqrt{s}}\}=\frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$

18) Demuestre que: $L^{-1}\{\frac{\sqrt{s+1}-\sqrt{s}}{\sqrt{s+1}+\sqrt{s}}\}=\frac{e^{-t/2}J_1(t/2)}{t}$

19) Demuestre que para $n \in Z^+$, se tiene: $L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)^{n+1}}\}=\frac{t^n e^{-t}}{n!}$

20) Demuéstrese que para m > -1: $L^{-1}\{\frac{1}{(s+a)^{m+1}}\}=\frac{t^m e^{-at}}{\Gamma(m+1)}$

21) Halle la formula para determinar: $F_n(t)=L^{-1}\{\frac{1}{s^n(s^2+1)}\},\ n \in Z^+$

22) Hallar $F(t)=L^{-1}\{\frac{(s^3-3s^2+6s-4)e^{-\pi(s-1)}}{(s^2-2s+2)^2}\}$

Rpta. $F(t)=-e^{-t}[\cos t+(t-\pi)\operatorname{sen} t]\mu_\pi(t)$

23) Evaluar $L^{-1}\{\frac{e^{-4s}}{(s+2)^3}\}$ **Rpta.** $F(t)=\frac{1}{2}(t-4)^2 e^{-2(t-4)}\mu(t-4)$

24) Si F(t) es continua para t > 0 y $F(t)=L^{-1}\{\frac{e^{-3s}}{(s+1)^3}\}$ evaluar F(2), F(s), F(7)

Rpta. F(2) = 0 , $F(5)=2e^{-2}$, $F(7)=8e^{-4}$

25) Si F(t) es continua para t > 0 y $F(t)=L^{-1}\{\frac{(1-e^{-2s})(1-3e^{-2s})}{s^2}\}$ evaluar F(1), F(3), F(5)

Rpta. F(1) = 1 , F(3) = -1 , F(5) = -4

26) Hallar $L^{-1}\{\frac{1}{(s+a)\sqrt{s^2+b}}\}$ **Rpta.** $F(t)=e^{-at}\int_0^t e^{at}J_0(bt)dt$

27) Si $H(s)=\ln(1+\frac{1}{\sqrt{1+s^2}})$ calcular $F(t)=L^{-1}\{H(s)\}$

28) Mostrar que para cualquier entero n > 1, a ≠ 0.

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{n+1}}\}=\frac{1}{2n}\int_0^t t\,L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+a^2)^n}\}dt$$

29) Utilizando el resultado del ejercicio 27), para demostrar que:

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{n+1}}\}=\frac{1}{2^n a n!}\int_0^t t\int_0^t t\int_0^t \dots\int_0^t t\,\text{sen}\,t\,dt \text{ , n veces.}$$

30) Dado c > 0, s > 0 y $F(t)=L^{-1}\{f(s)\}$. Pruebe que

$$L^{-1}\{\frac{f(s)}{\cosh(cs)}\}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n F(t-2nc-c)U(t-2nc-c)$$

31) Calcular $L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{(s^2+2s+16)^3}}\}$

Rpta. $F(t)=\frac{e^{-t}}{\sqrt{15}}\int_0^t \text{sen}\sqrt{15(t-u)}\,J_0(\sqrt{15}u)du$

32) Calcular $L^{-1}\{\frac{1}{s}J_0(\frac{2}{\sqrt{5}})\}$ **Rpta.** $F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{(n!)^2}$

33) Calcular la transformada de Laplace: $L^{-1}\{\frac{1}{s(as+1)(as+2)\dots(as+n)}\}$

Rpta. $F(t)=\frac{t}{n!}(1-e^{-\frac{1}{at}})^n$

34) Hallar $F(t)=L^{-1}\{\frac{e^{-3s}}{se^{s}-1}\}$ **Rpta.** $F(t)=\sum_{n=4}^{\infty}\frac{(t-n)^{n-4}\mu(t-4)}{(n-4)!}$

35) Demostrar que :

$$L^{-1}\{\frac{1}{1+\sqrt{1+s}}+\frac{1}{1+\sqrt{s}}+\frac{1}{s\sqrt{s+a}}\}=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}(1+e^{-t})-(1+e^{t})f_{er}(\sqrt{t})+\frac{1}{\sqrt{a}}f_{er}(at)$$

36) Calcular $L^{-1}\{\frac{1}{s-\sqrt{s}}\}$ 37) Calcular $L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s-a}+b}\}$

38) Calcular $L^{-1}\{\frac{2s^4+14s^2+16}{(s^2+1)(s^2+2)(s^2+7)(1+e^{-5s})}+\frac{s^3}{s^4+4a^4}\}$

39) Hallar $L^{-1}\{\frac{s^6+s^5+10s^4+6s^3+25s^2+9s}{s^8+16s^6+94s^4+240s^2+225}\}$

40) Encontrar $L^{-1}\{\frac{2(s^3-7s^2+14s-9)}{(s-1)^2(s-2)^3}\}$

41) Encontrar $L^{-1}\{\frac{4s^3+18s^2+30s+17}{(s+2)^4}\}$

42) Encontrar $L^{-1}\{\frac{s^3-2s^2+s}{(s^2-4s+5)(s^2-2s+5)}\}$

43) Encontrar $L^{-1}\{\frac{3s^2-2s-1}{(s-3)(s^2+1)}\}$ 44) Hallar $L^{-1}\{\frac{2s^3+5s^2+6s+1}{s(s+1)^3}\}$

45) Hallar $L^{-1}\{\frac{9-6s+5s^2 2-s^3}{s^2(s-3)^2}\}$ 46) Hallar $L^{-1}\{\frac{5-7s+4s^2-s^3}{(s+1)^3(s-2)^2}\}$

47) Calcular $L^{-1}\{\frac{2(s^3+2s^2-s-47)}{(s^2+4s+13)^2}\}$

48) Calcular $L^{-1}\{\dfrac{s^3-6s^2+27s-38}{(s^2-4s+13)^2}\}$

49) Calcular $L^{-1}\{\dfrac{s^2-6s+7}{(s^2+4s+5)^2}\}$ **50)** Calcular $L^{-1}\{\dfrac{1}{\sqrt{as+b}}\}$, a,b > 0

51) Calcular $L^{-1}\{s\,L\{\int_0^t \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}dt\}\}$

52) Hallar la transformada inversa de Laplace $L^{-1}\{\dfrac{1}{s(s-a)^n}\}$

53) Hallar $L^{-1}\{\dfrac{7s-1}{(s-3)(s+2)(s-1)}\}$

54) Hallar la transformada inversa de $L^{-1}\{\dfrac{4}{s^2}(\dfrac{s-2}{s^2+4})\}$

55) Calcular $L^{-1}\{\dfrac{As+B}{s^2+2bs+c}\}$, ∀ A,B,b y c reales

56) Calcular $L^{-1}\{\dfrac{1}{s^4+4a^4}\}$ **57)** Evaluar $L^{-1}\{\dfrac{2e^{3(1-\frac{s}{2})}\operatorname{senh}(3+\frac{s}{2})}{(s+6)^{5/6}}\}$

58) Calcular $F(t)=L^{-1}\{\dfrac{1}{s^6(1-e^{-4s})}\}$ y F(12)

59) Evaluar $L^{-1}\{\dfrac{e^{-\frac{1}{s}}}{\sqrt{s}}\}$ **60)** Calcular $L^{-1}\{\dfrac{1}{\sqrt{s+a}+\sqrt{s+b}}\}$, a ≠ b

61) Calcular $L^{-1}\{\dfrac{10}{s^{21}\operatorname{senh}(cs)}\}$ **62)** Calcular $L^{-1}\{\dfrac{1}{s^6\cosh(cs)}\}$

63) Calcular $L^{-1}\{\dfrac{e^{-\frac{a}{s}}}{\sqrt{s}}\}$ **64)** Evaluar $L^{-1}\{\dfrac{e^{\frac{a}{s}}}{s^{n+1}}\}$

65) Evaluar $L^{-1}\{\dfrac{e^{-4s}}{s^4-1}\}$ **66)** Evaluar $L^{-1}\{\dfrac{e^{-6s}}{s\,e^{4s}+1}\}$

67) Calcular $L^{-1}\{\dfrac{1}{(s+6)^{n+1}}\}$

68) Calcular $L^{-1}\{\dfrac{4s^3+6s^2+14s+11}{(s^5+4s^4+6s^3+5s^2+2)(1-e^{-2s})^2}\}$

69) Calcular $L^{-1}\{\dfrac{4-e^{-as}}{s(4+2e^{-as})}\}$ **70)** Encontrar $L^{-1}\{\dfrac{e^{1/5}}{\sqrt{s^3}}\}$

71) Encontrar $L^{-1}\{\dfrac{20}{s^6\ \operatorname{senh}(4s)}\}$

72) Calcular $L^{-1}\{\dfrac{s^4-6s^3+5s^2+3s-1}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)(s^2+36)}\}$

73) Calcular $L^{-1}\{\dfrac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^2}{\sqrt{s^2+a^2}}\}$ **74)** Hallar $L^{-1}\{\dfrac{\cosh(-4s)}{s^4+4a^4}\}$

75) Encontrar $L^{-1}\{\dfrac{1}{\sqrt{s^4-a^4}}\}$ **76)** Encontrar $L^{-1}\{\dfrac{e^{-4s}\ \operatorname{senh}(6s)}{(1-e^{-4s})^2}\}$

77) Calcular $L^{-1}\{\dfrac{e^{-20s}}{s^5+5s^4+14s^3+62s^2+149s+130}\}$

78) Evaluar $L^{-1}\{\dfrac{2e^{5-\frac{5s}{2}}\cosh(5+\frac{s}{2})}{(s+24)^{13/2}}\}$ **79)** Evaluar $L^{-1}\{\dfrac{2s^2-9s+19}{(s-1)^2(s+3)}\}$

80) Calcular $L^{-1}\{\frac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s(s^2+1)}\}$

Rpta. F(t) = [1 - cos (t - 1)] μ(t - 1) - [1 - cos(t - 2)]μ(t - 2)

81) Demostrar que:

a) $L^{-1}\{e^{-a\sqrt{s}}\} = \frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$

b) $L^{-1}\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}\} = f_{er}(\frac{a}{\sqrt{4t}})$

c) $L^{-1}\{s e^{-a\sqrt{s}}\} = \frac{1}{4}(a^2 - 2t)\frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t^5}}$

d) $L^{-1}\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\} = \frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$

e) $L^{-1}\{e^{-4s-2\sqrt{s}}\} = \frac{1}{\sqrt{11(t-4)^3}} e^{-\frac{1}{t-4}} \mu(t-4)$

f) $L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{(s^2-a^2)^3}}\} = \frac{t\, I_1(t)}{a}$

g) $L^{-1}\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s+b\sqrt{s}}\} = e^{ab+b^2 t} f_{er}(b\sqrt{t} + \frac{a}{2\sqrt{t}})$

CAPITULO IV

4. APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

Las técnicas de transformada de Laplace son muy útil para resolver ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales dadas, es decir: A medida que avancemos en su estudio observamos que dicho método transforma un problema de Ecuaciones Diferenciales ordinarias en un problema algebraico de fácil análisis, el que una vez resuelta es llevado al problema original atravez de la transformada inversa de Laplace.

Este proceso observaremos en el siguiente esquema.

Como $L\{\frac{d^n y}{dt^n}\}$, n > 1, depende y(t) y sus n - 1 derivadas calculadas en t = 0, la Transformada de Laplace es especialmente adecuada para resolver problemas de valor inicial para ecuaciones diferenciales lineales. Este caso de ecuaciones diferenciales puede reducirse a una ecuación algebraica en las función transformada L{y(t)} = y(s), para ver esto, consideremos el problema de valor inicial.

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = g(t)$$

$y(0) = y_0 \ , \ y'(0) = y_0' \ , \ \ldots \ , \ y_{(0)}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, en donde

a_i, i = 0,1,...,n, y $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ son constantes, por la linealidad de la Transformada de Laplace podemos escribir.

$$a_n L\{\frac{d^n y}{dt^n}\} + a_{n-1} L\{\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}\} + \ldots + a_1 L\{\frac{dy}{dt}\} + a_0 L\{y\} = L\{g(t)\}$$

aplicando el teorema de la Transformada de Laplace

$$a_n [s^n L\{y\} - s^{n-1} y(0)\} s^{n-2} y'(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0)] + a_{n-1} [s^{n-1} L\{y\} - s^{n-2} y(0) -$$

$$- s^{n-3} y'(0) - \ldots - y^{n-2)}(0)] + \ldots + a_0 L\{y\} = L\{g(t)\}$$

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0) L\{y\} = a_n [s^{n-1} y(0) + s^{n-2} y'(0) + \ldots + y^{(n-1)}(0)] +$$

$$+ a_{n-1} (s^{n-1} + s^{n-2} y(0) + \ldots + y^{(n-2)}(0)) + \ldots + L\{g(t)\}$$

de donde L {y} = y (s), calculando y(t) mediante la transformada inversa de Laplace.

$$y(t) = L^{-1}\{y(s)\}$$

En forma similar para las ecuaciones lineales de coeficientes variables no homogéneas.

Ejemplo.- Resolver las siguientes diferenciales

1) $y''(t)+4y(t)=9t \quad , \; y(0)=0 \;\; , \;\; y'(0)=7$

Solución

Tomando Transformada de Laplace en la ecuación diferencial

$$L\{y''(t)+4y(t)\}=L\{9t\}$$

$$L\{y''(t)\}+4L\{y(t)\}=L\{9t\}$$

$$s^2L\{y(t)\}-s\,y(0)-y'(0)+4L\{y(t)\}=\frac{9}{s^2}$$

$$(s^2+4)L\{y(t)\}=\frac{9}{s^2}+7=\frac{9+7s^2}{s^2}$$

$$L\{y(t)\}=\frac{7s^2+9}{s^2(s^2+4)}=\frac{9}{4}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+4}\right)+\frac{7}{s^2+4}$$

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{9}{4}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+4}\right)+\frac{7}{s^2+4}\right\}$$

$$y(t)=\frac{9}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+4}\right\}+7L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}=\frac{9}{4}\left(t-\frac{1}{2}\operatorname{sen}2t\right)+\frac{7}{2}\operatorname{sen}2t$$

$$\therefore \quad y(t)=\frac{9t}{4}+\frac{19}{8}\operatorname{sen}2t$$

2) $(D^2-4D+4)y=2e^{2t}+\cos t \; , \;\; y(0)=\frac{3}{25} \;\; , \;\; y'(0)=-\frac{4}{25}$

Solución

$$\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}+4y=2e^{2t}+\cos t$$

tomando Transformada de Laplace en la ecuación

$$L\{\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}+4y\} = L\{2e^{2t}+\cos t\}$$

$$s^2L\{y(t)\}-s\,y(0)-y'(0)-4sL\{y(t)\}+4y(0)+4L\{y(t)\} = L\{2e^{2t}+\cos t\}$$

$$(s^2-4s+4)L\{y(t)\}-\frac{3s}{25}+\frac{4}{25}+\frac{12}{25}=\frac{2}{s-2}+\frac{s}{s^2+1}$$

$$(s-2)^2L\{y(t)\}=\frac{2}{s-2}+\frac{s}{s^2+1}+\frac{3s-16}{25}$$

$$L\{y(t)\}=\frac{2}{(s-2)^3}+\frac{s}{(s^2+1)(s-2)^2}+\frac{3s-16}{25(s-2)^2}$$

$$y(t)=L^{-1}\{\frac{2}{(s-2)^3}+\frac{s}{(s^2+1)(s-2)^2}+\frac{3s-16}{25(s-2)^2}\}$$

$$y(t)=t^2e^{2t}+\frac{3}{5}t\,e^{2t}+\frac{3}{25}e^{2t}-\frac{\operatorname{sen} t}{4}$$

3) $t\,y''(t)+y'(t)+t\,y(t)=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

Solución

Tomando Transformada de Laplace se tiene

$L\{t\,y''(t)+y'(t)+t\,y(t)\}=0$, de donde

$$L\{t\,y''(t)\}+L\{y'(t)\}+L\{t\,y(t)\}=0$$

$$-\frac{d}{ds}(s^2L\{y(t)\}-s\,y(0)-y'(0)+sL\{y(t)\}-y(0)-\frac{d}{ds}L\{y(t)\}=0$$

$$-2s\,L\{y(t)\}-s^2\frac{d}{ds}L\{y(t)\}+s\,L\{y(t)\}-\frac{d}{ds}L\{y(t)\}=0$$

$$(s^2+1)\frac{d}{ds}L\{y(t)\} = -s\,L\{y(t)\}$$

$$\frac{dL\{y(t)\}}{L\{y(t)\}} = -\frac{s\,ds}{s^2+1}$$, integrando

$$\ln(L\{y(t)\}) = -\ln\sqrt{s^2+1} + \ln k$$

$$\ln(L\{y(t)\}) = \ln\frac{k}{\sqrt{s^2+1}}$$, levantando el logaritmo

$$L\{y(t)\} = \frac{k}{\sqrt{s^2+1}}$$, tomando la inversa

$y(t) = k\,L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\} = k\,J_0(t)$, como y(0) = 1 y $J_0(0) = 1$ entonces
$y(0) = c\,J_0(0) \;\Rightarrow\; 1 = c$

$$\therefore\; y(t) = J_0(t)$$

4.1. Solución De Sistemas De Ecuaciones Diferenciales por El método de la Transformada de Laplace.

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + f(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + g(t) \end{cases} \quad \ldots (1)$$

con condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, donde x,y son las funciones incógnitas, $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ son constantes y f(t), g(t) son funciones conocidas tomando la Transformada de Laplace a ambas ecuaciones diferenciales del sistema (1)

$$\begin{cases} L\{\frac{dx}{dt}\} = L\{a_{11}x + a_{12}y + f(t)\} \\ L\{\frac{dy}{dt}\} = L\{a_{21}x + a_{22}y + g(t)\} \end{cases}$$

mediante las propiedades de la transformada se tiene:

$$\begin{cases} s\,L\{x\} - x(0) = a_{11}L\{x\} + a_{12}L\{y\} + L\{f(t)\} \\ s\,L\{y\} - y(0) = a_{21}L\{x\} + a_{22}L\{y\} + L\{g(t)\} \end{cases}$$

agrupando términos se tiene:

$$\begin{cases} (s - a_{11})\,L\{x\} - a_{12}L\{y\} = x_0 + L\{f(t)\} \\ -a_{21}L\{x\} + (s - a_{22})L\{y\} = y_0 + L\{g(t)\} \end{cases} \quad \ldots (2)$$

Si $x_0 + L\{f(t)\}$ y $y_0 + L\{g(t)\}$ no son ambos cero, entonces se puede resolver el sistema (2), mediante la regla de CRAMER, es decir:

$$L\{x\} = \frac{\begin{vmatrix} x_0 + L\{f(t)\} & -a_{12} \\ y_0 + L\{g(t)\} & s - a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{(x_0 + L\{f(t)\})(s - a_{22}) + a_{12}(y_0 + L\{g(t)\})}{(s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12}a_{21}}$$

$$x = L^{-1}\{\frac{(x_0 + L\{f(t)\})(s - a_{22}) + a_{12}(y_0 + L\{g(t)\})}{(s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12}a_{21}}\}$$

$$L\{y\} = \frac{\begin{vmatrix} s - a_{11} & x_0 + L\{f(t)\} \\ -a_{21} & y_0 + L\{g(t)\} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{(s - a_{11})(y_0 + L\{g(t)\}) + a_{21}(x_0 + L\{f(t)\})}{(s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12}a_{21}}$$

$$y = L^{-1}\{\frac{(s - a_{11})(y_0 + L\{g(t)\}) + a_{21}(x_0 + L\{f(t)\})}{(s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12}a_{21}}\}$$

por lo tanto es evidente que la Transformada de Laplace, nos permite convertir un sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales dadas en un sistema de ecuaciones simultáneas. Este método puede generalizarse a sistemas de "n" ecuaciones diferenciales de primer orden de coeficientes, dado entonces un sistema correspondiente a "n" ecuaciones lineales simultáneas.

Ejemplo.- Resolver el problemas con valor inicial. $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + e^t \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) + e^{-t} \end{cases}$

como x(0) = 1, y(0) = 0.

Solución

Tomando Transformada de Laplace, a cada ecuación diferencial

$$\begin{cases} L\{x'(t)\} = L\{x(t) - y(t) + e^t\} \\ L\{y'(t)\} = L\{2x(t) + 3y(t) + e^{-t}\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s\,L\{x(t)\} - x(0) = L\{x(t)\} - L\{y(t)\} + L\{e^t\} \\ s\,L\{y'(t)\} - y(0) = 2L\{x(t)\} + 3L\{y(t)\} + L\{e^{-t}\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s-1)L\{x(t)\} + L\{y(t)\} = 1 + \dfrac{1}{s-1} = \dfrac{s}{s-1} \\ -2\,L\{x(t)\} + (s-3)L\{y(t)\} = \dfrac{1}{s+1} \end{cases}$$

$$L\{x(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{s}{s-1} & 1 \\ \dfrac{1}{s+1} & s-3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-1 & 1 \\ -2 & s-3 \end{vmatrix}} = -\frac{11}{10(s+1)} + \frac{19s-45}{10(s^2-4s+5)}$$

$$x(t) = L^{-1}\{\frac{-11}{10(s+1)} + \frac{19(s-2)-7}{10[(s-2)^2+1]}\} = -\frac{11}{10}e^{-t} + \frac{19}{10}e^{2t}\cos t - \frac{7}{10}e^{2t}\,\text{sen}\,t$$

$$\therefore\ x(t) = -\frac{11}{10}e^{-t} + \frac{e^{2t}}{10}(19\cos t - \text{sen}\,t)$$

$$L\{y(t)\}=\frac{\begin{vmatrix} s-1 & \frac{s}{s-1} \\ -2 & \frac{1}{s+1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-1 & 1 \\ -2 & s-3\end{vmatrix}}=\frac{\frac{s-1}{s+1}+\frac{2s}{s-1}}{(s-1)(s-3)+2}=\frac{3s^2+1}{(s^2-1)(x^2-4s+5)}$$

$$=-\frac{2}{5(s+1)}+\frac{2}{s-1}-\frac{8}{5}\left(\frac{s-2}{(s-2)^2+1}\right)-\frac{7}{s}\left(\frac{1}{(s-2)^2+1}\right)$$

$$y(t)=L^{-1}\{-\frac{2}{5(s+1)}+\frac{2}{s-1}-\frac{8}{5}\left(\frac{s-2}{(s-2)^2+1}\right)-\frac{7}{5}\left(\frac{1}{(s-2)^2+1}\right)\}$$

$$y(t)=-\frac{2}{5}e^{-t}+2e^{t}-\frac{8}{5}e^{2t}\cos t-\frac{7}{5}e^{2t}\operatorname{sen} t$$

4.2. Una Ecuación integral.

El teorema de la convolucion es útil para resolver otros tipos de ecuaciones en las que aparece una función incógnita bajo un signo de integral. En el ejemplo siguiente obtener f(t) resolviendo una "Ecuación Integral" de la forma.

$$f(t)=g(t)+\int_0^t f(\mu)h(t-\mu)d\mu$$

donde las funciones g(t) y h(t) son conocidas.

Ejemplo.- Obtener f(t) si $f(t)=3t^2-e^{-t}-\int_0^t f(\mu)e^{t-\mu}d\mu$

Solución

Tomando Transformada de Laplace.

$$L\{f(t)\}=L\{3t^2\}-L\{e^{-t}\}-L\{\int_0^t f(\mu)e^{t-\mu}d\mu\}$$

$$L\{f(t)\}=\frac{6}{s^3}-\frac{1}{s+1}-L\{f(t)\}L\{e^t\}$$

$$L\{f(t)\}=\frac{6}{s^3}-\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s-1}L\{f(t)\}$$

$$(1+\frac{1}{s-1})L\{f(t)\}=\frac{6}{s^3}-\frac{1}{s+1}$$

$$\frac{s}{s-1}L\{f(t)\}=\frac{6}{s^3}-\frac{1}{s+1}$$

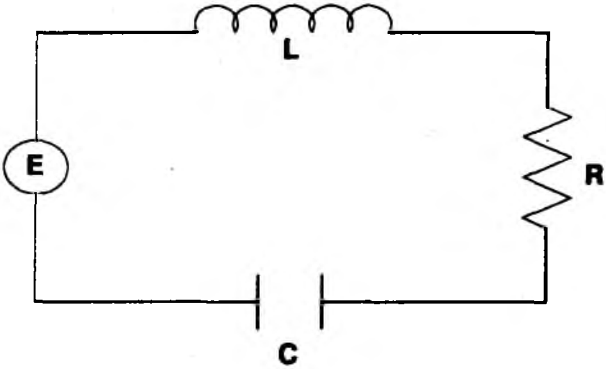
$$L\{F(t)\}=\frac{6(s-1)}{s^4}-\frac{s-1}{s(s+1)}=\frac{6}{s^3}-\frac{6}{s^4}+\frac{1}{s}-\frac{2}{s+1}$$

$$f(t)=L^{-1}\{\frac{6}{s^3}-\frac{6}{s^4}+\frac{1}{s}-\frac{2}{s+1}\}=3t^2-t^3+1-2e^{-t}$$

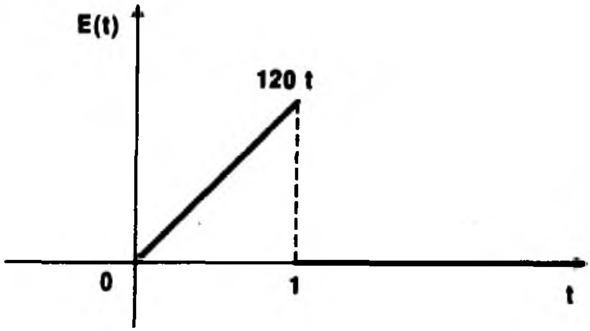
4.3. Una Ecuación Integro-Diferencial.

La segunda Ley de Kirchoff establece que en un circuito simple conectado en serie, la suma de las caídas de potencial a través de un inductor, de un resistor y de un capacitador es igual a la tensión E(t) suministrada, es decir que: caída de potencial a través del inductor $=L\frac{di}{dt}$ caída de potencial a través del resistor = Ri(t) y caída de potencial a través del capacitor $=\frac{1}{c}\int_0^t i(\tau)d\tau$ en donde i(t) es la corriente y L, R y C son constante, se deduce que la corriente en un circuito como el que se muestra en la figura esta regida por la ecuación Integro-diferencial.

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{c}\int_0^t i(\tau)d\tau=E(t)$$



Ejemplo.- Determinar la corriente i(t) en un circuito simple L-R -C si L = 0.1 H, R = 20 Ω, $C = 10^{-3} F$, i(0) = 0 y si la tensión aplicada E(t) es como se muestra en la figura



Solución

como el voltaje se anula para t ≥ 1, entonces podemos escribir así:

$$E(t) = \begin{cases} 120t & , \quad 0 \le t < 1 \\ 0 & , \quad t \ge 1 \end{cases}$$

expresado en términos de la función escalón unidad.

$$E(t) = 120t - 120t\ \mu(t - 1)$$

por medio de la segunda propiedad de traslación se puede escribir así:

E(t) = 120 t - 120 (t - 1) μ(t - 1) - 120 μ(t - 1)

ahora reemplazando los datos en la ecuación

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{c}\int_0^t i(\tau)d\tau = E(t)$$

$$0.1\frac{di}{dt}+20i+10^3\int_0^t i(\tau)d\tau = 120t-120(t-1)\mu(t-1)-120\,\mu(t-1)$$

Si $L\{i(t)\}=I(s) \Rightarrow L\{\int_0^t i(\tau)d\tau\}=\frac{I(s)}{s}$

$$L\{0.1\frac{di}{dt}\}+20L\{i(t)\}+10^3\,L\{\int_0^t i(\tau)d\tau\} = L\{120t-120(t-1)U(t-1)-120\,U(t-1)\}$$

$$0.1\,s\,I(s)+20I(s)+10^3\,\frac{I(s)}{s}=\frac{120}{s^2}-\frac{120e^{-s}}{s^2}-\frac{120e^{-s}}{s}$$

multiplicando por 10 s a la ecuación

$$(s+100)^2\,I(s)=1200(\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}-e^{-s})$$

$$I(s)=1200[\frac{1}{s(s+100)^2}-\frac{1}{s(s+100)^2}e^{-s}-\frac{1}{(s+100)^2}e^{-s}]$$

$$I(s)=1200[\frac{1/10000}{s}-\frac{1/10000}{s+100}-\frac{1/100}{(s+100)^2}-\frac{1/10000}{s}e^{-s}+$$

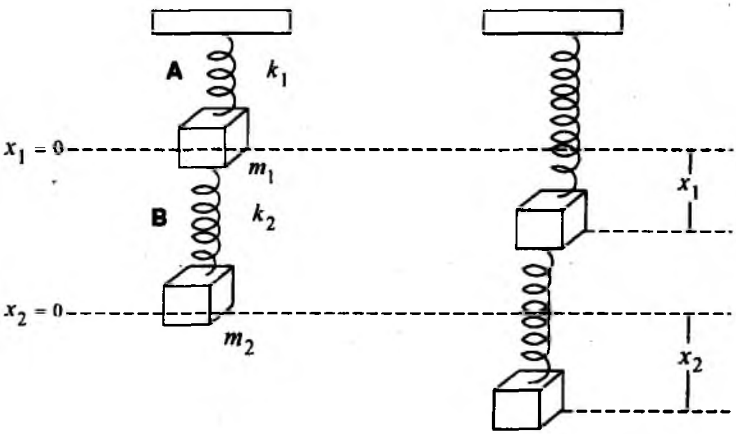
$$+\frac{1/10000}{s+100}e^{-s}+\frac{1/100}{(s+100)^2}e^{-s}-\frac{1}{(s+100)^2}e^{-s}]$$

aplicando el teorema de traslación para la transformada inversa.

$$i(t)=\frac{3}{25}[1-\mu(t-1)]-\frac{3}{25}[e^{-100t}-e^{-100(t-1)}\mu(t-1)]-12te^{-100t}-1188(t-1)e^{-100(t-1)}\mu(t-1)$$

4.4. Resortes acoplados.

Supongamos que dos masas m_1 y m_2 están sujetas a dos resortes A y B, de masa insignificantes, cuyas componentes son k_1 y k_2, respectivamente. A su vez, los dos resortes están conectados como se muestra en la figura.



Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ los desplazamientos verticales de las masas con respecto a sus posiciones de equilibrio cuando el sistema se encuentra en movimiento, el resorte B esta sujeto tanto a un alargamiento como a un acortamiento; por consiguiente, su alargamiento neto es x_2-x_1. De este modo, por la ley Hooke resulta que los resortes A y B ejercen sobre m_1, respectivamente las fuerza

$$-k_1x_1 \text{ y } k_2(x_2-x_1)$$

Si no se aplica ninguna fuerza externa al sistema y no hay fuerza de amortiguación, entonces la fuerza neta sobre m_1 es $-k_1x_1+k_2(x_2-x_1)$ por la segunda ley de Newton escribimos así:

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}=-kx_1+k_2(x_2-x_1)$$

De igual modo la fuerza neta ejercida sobre la masa m_2 se debe solamente al alargamiento neto de B, es decir: $-k_2(x_2 - x_1)$
de esta manera resulta que

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2(x_2 - x_1)$$

En otras palabras, el movimiento del sistema acoplado queda descrito por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden simultáneas.

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2 \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2(x_2 - x_1) \end{cases} \quad \ldots (1)$$

Ejemplo.- Resolver el sistema (1) suponiendo que $k_1 = 6$, $k_2 = 4$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ y que las masas parten de sus posiciones de equilibrio con velocidades unitarias de direcciones opuestas.

Solución

como las masas parte de su posición de equilibrio entonces $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$
y como sus velocidades son unitarias y opuestas entonces $x_1'(0) = 1$, $x_2'(0) = -1$
ahora reemplazando en el sistema (1)

$$\begin{cases} x_1''(t) + 10x_1'(t) - 4x_2(t) = 0 \\ -4x_1(t) + x_2''(t) + 4x_2(t) = 0 \end{cases} \quad \ldots (\alpha)$$

tomando transformada de Laplace a cada ecuación

$$\begin{cases} L\{x_1''(t) + 10x_1'(t) - 4x_2(t)\} = 0 \\ L\{x_2''(t) - 4x_1(t) + 4x_2(t)\} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2 L\{x_1(t)\} - s\,x_1(0) - x_0(0) + 10sL\{x_1(t)\} - 10x_1(0) - 4L\{x_2(t)\} = 0 \\ s^2 L\{x_2(t)\} - s\,x_2(0) - x_2'(0) - 4L\{x_1(t)\} + 4L\{x_2(t)\} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s^2 + 10s)L\{x_1(t)\} - 4L\{x_2(t)\} = 1 \\ -4L\{x_1(t)\} + (s^2 + 4)L\{x_2(t)\} = -1 \end{cases}$$

aplicando la regla de CRAMER se tiene:

$$L\{x_1(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & s^2+4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+10s & -4 \\ -4 & s^2+4 \end{vmatrix}} = \frac{s^2}{(s^2+2)(s^2+12)}$$

usando fracciones parciales podemos escribir.

$$\frac{s^2}{(s^2+2)(s^2+12)} = \frac{As+B}{s^2+2} + \frac{Cs+D}{s^2+12}$$

$$s^2 = (As+B)(s^2+12) + (Cs+D)(s^2+2)$$

$$s^2 = (A+C)s^3 + (B+D)s^2 + (12A+2C)s + 12B + 2D$$

comparando los coeficientes de s en cada miembro de la igualdad se tiene:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=1 \\ 12A+2C=0 \\ 12B+2D=0 \end{cases} \quad \text{de donde} \quad \begin{aligned} A&=0 \\ C&=0 \\ B&=-\frac{1}{5} \\ D&=\frac{6}{5} \end{aligned}$$

$$\frac{s^2}{(s^2+2)(s^2+12)} = -\frac{1}{5(s^2+2)} + \frac{6}{5(s^2+12)}$$

$$L\{x_1(t)\} = -\frac{1}{5(s^2+2)} + \frac{6}{5(s^2+12)}$$

$$x_1(t) = L^{-1}\{-\frac{1}{5(s^2+2)} + \frac{6}{5(s^2+12)}\}$$

$$x_1(t) = -\frac{1}{5\sqrt{2}} L^{-1}\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\} + \frac{6}{5\sqrt{12}} L^{-1}\{\frac{\sqrt{12}}{s^2+12}\}$$

$$x_1(t) = -\frac{\sqrt{2}}{10}\operatorname{sen}\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{sen} 2\sqrt{2}t$$

$$L\{x_2(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} s^2+10s & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+10s & -4 \\ -4 & s^2+4 \end{vmatrix}} = \frac{s^2+6}{(s^2+2)(s^2+12)}$$

siguiendo el proceso anterior, mediante fracciones parciales obtenemos.

$$L\{x_2(t)\} = -\frac{2/5}{s^2+2} - \frac{3/5}{s^2+12}$$

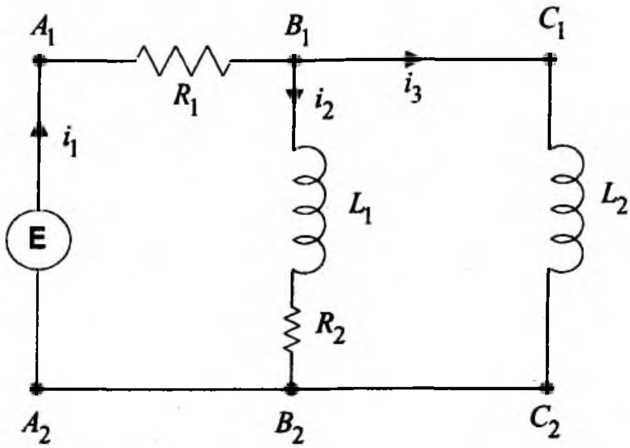
$$x_2(t) = -\frac{2}{5\sqrt{2}} L^{-1}\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\} - \frac{3}{5\sqrt{12}} L^{-1}\{\frac{\sqrt{12}}{s^2+12}\} = -\frac{\sqrt{2}}{5}\operatorname{sen}\sqrt{2}t - \frac{\sqrt{3}}{10}\operatorname{sen} 2\sqrt{3}t$$

Luego la solución del sistema (α) es:

$$\begin{cases} x_1(t) = -\dfrac{\sqrt{2}}{10}\operatorname{sen}\sqrt{2}t + \dfrac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{sen} 2\sqrt{3}t \\ x_2(t) = -\dfrac{\sqrt{2}}{5}\operatorname{sen}\sqrt{2}t - \dfrac{\sqrt{3}}{10}\operatorname{sen} 2\sqrt{3}t \end{cases}$$

4.5. Redes Eléctricas.

Un sistema eléctrico (red) con mas de un circuito simple (o lazo) también da origen a ecuaciones diferenciales simultáneas tal como se muestra en la figura.



La corriente $i_1(t)$ se divide según las direcciones indicadas en el punto B_1, llamando punto de ramificación de la red por la primer ley de KIRCHOFF podemos escribir.

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) \qquad \ldots (1)$$

además, también se puede aplicar la segunda ley de KIRCHOFF a cada circuito, para el caso del circuito $A_1B_1B_2A_2A_1$, sumando las caídas de voltaje a través de cada parte del circuito resulta.

$$E(t) = i_1R_1 + L_1\frac{di_2}{dt} + i_2R_2 \quad \ldots (2)$$

en forma similar, para el circuito $A_1B_1C_1C_2B_2A_2A_1$, obtenemos

$$E(t) = i_1R_1 + L_2\frac{di_3}{dt} \qquad \ldots (3)$$

ahora reemplazamos (1) en (2) y (3) se obtiene dos ecuaciones de primer orden para las corrientes $i_2(t)$ e $i_3(t)$.

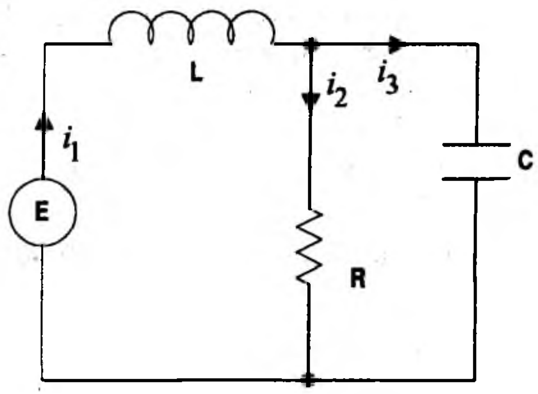
$$\begin{cases} L_1 \dfrac{di_2}{dt} + (R_1 + R_2)i_2 + R_1 i_3 = E(t) \\ L_2 \dfrac{di_3}{dt} + R_1 i_2 + R_1 i_3 = E(t) \end{cases} \qquad \ldots (4)$$

con las condiciones naturales $i_2(0) = 0$, $i_3(0) = 0$, el sistema (4) se puede resolver mediante la Transformada de Laplace.

4.6. Problema De Entrenamiento para el alumno.

Demostrar que el sistema de ecuaciones diferenciales que describe las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ en la red de la figura que contiene un resistor, un inductor y un capacitador es:

$$\begin{cases} L\dfrac{di_1}{dt} + Ri_2 = E(t) \\ RC\dfrac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0 \end{cases} \qquad \ldots (*)$$



Ejemplo.- Resolver el sistema (*) con las condiciones E = 60V, L = 1H, R = 50Ω, $C = 10^{-4}F$, y donde i_1 e i_2 son inicialmente igual a cero.

Solución

al reemplazar los datos en el sistema (*) se tiene.

$$\begin{cases} \dfrac{di_1}{dt} + 50i_2 = 60 \\ 50(10^{-4})\dfrac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0 \end{cases}, \quad \text{sujeto a } i_1(0) = 0,\ i_2(0) = 0$$

ahora aplicamos transformada de Laplace a cada ecuación del sistema.

$$\begin{cases} L\{\dfrac{di_1(t)}{dt} + 50i_2(t)\} = L\{60\} \\ L\{50(10^{-4})\dfrac{di_2(t)}{dt} + i_2 - i_1\} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s\,L\{i_1(t)\} - i_1(0) + 50L\{i_2(t)\} = \dfrac{60}{s} \\ 50(10^{-4})s\,L\{i_2(t)\} - 50(10^{-4})i_2(0) + L\{i_2(t)\} - L\{i_1(t)\} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s\,L\{i_1(t)\} + 50L\{i_2(t)\} = \dfrac{60}{s} \\ -200\,L\{i_1(t)\} + (s+200)L\{i_2(t)\} = 0 \end{cases}$$

$$L\{i_1(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{60}{s} & 50 \\ 0 & s+200 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & 50 \\ -200 & s+200 \end{vmatrix}} = \frac{60s}{s(s+100)^2}$$

mediante fracciones parciales se tiene

$$L\{i_1(t)\} = \frac{6}{5s} - \frac{6}{5(s+100)} - \frac{60}{(s+100)^2}$$

$$i_1(t) = L^{-1}\{\frac{6}{5s} - \frac{6}{5(s+100)} - \frac{60}{(s+100)^2}\} = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 60te^{-100t}$$

$$L\{i_2(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} s & \frac{60}{s} \\ -200 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & 50 \\ -200 & s+200 \end{vmatrix}} = \frac{12000}{s(s+100)^2}$$

mediante fracciones parciales se puede escribir

$$L\{i_2(t)\} = \frac{6}{5s} - \frac{6}{5(s+100)} - \frac{120}{(s+100)^2}$$

$$i_2(t) = L^{-1}\{\frac{6}{5s} - \frac{6}{5(s+100)} - \frac{120}{(s+100)^2}\} = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 120t\,e^{-100t}$$

mediante fracciones parciales se tiene

$$i_1(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 60t\,e^{-100t}$$

$$i_2(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 120t\,e^{-100t}$$

4.7 Ejercicios Desarrollados.

1) Demostrar que la ecuación subsidiaria de la ecuación diferencial $y''+ay'+by = g(t)$, tiene la Solución $y(s) = \frac{(s+a)y(0)+y'(0)}{s^2+as+b} + \frac{R(s)}{s^2+as+b}$

Solución

Tomando la Transformada de Laplace a la ecuación diferencial

$$L\{y''(t)+ay'(t)+by(t)\}=L\{g(t)\}$$

$$s^2 y(s)-s\,y(0)-y'(0)+a\,s\,y(s)+b\,y(s)=R(s)$$

$$(s^2+as+b)y(s)=(s+a)y(0)+y'(0)+R(s)$$

$$\therefore \quad y(s)=\frac{(s+a)y(0)+y'(0)}{s^2+as+b}+\frac{R(s)}{s^2+as+b}$$

2) Resolver la ecuación diferencial: $y''+4y=9t$, $y(0)=0$, $y'(0)=7$

Solución

Tomando la Transformada de Laplace a la ecuación diferencial

$L\{y''+4y\}=L\{9t\}$, de donde

$$s^2 L\{y\}-s\,y(0)-y'(0)+4L\{y\}=\frac{9}{s^2}$$

$$(s^2+4)L\{y\}=\frac{9}{s^2}+7=\frac{7s^2+9}{s^2}$$

$$L\{y\}=\frac{7s^2+9}{s^2(s^2+4)}=\frac{9}{4s^2}+\frac{19}{4}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)$$

$$y=L^{-1}\left\{\frac{9}{4s^2}+\frac{19}{4}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)\right\}$$

$$\therefore \quad y=\frac{9t}{4}+\frac{19}{8}\operatorname{sen}2t$$

3) Resolver la ecuación Diferencial

$$y''-3y'+2y=4t+12e^{-t},\ y(0)=6,\ y'(0)=-1$$

Solución

Tomando la Transformada de Laplace se tiene.

$$L\{y''-3y'+2y\}=L\{4t+12e^{-t}\}$$

$$s^2L\{y\}-s\,y(0)-3s\,L\{y\}+3y(0)+2L\{y\}=\frac{4}{s^2}+\frac{12}{s+1}$$

$$(s^2-3s+2)L\{y\}-6s+1+18=\frac{4}{s^2}+\frac{12}{s+1}$$

$$(s^2-3s+2)L\{y\}=6s-19+\frac{4}{s^2}+\frac{12}{s+1}=\frac{6s^4-13s^3-7s^2+4s+4}{s^2(s+1)}$$

$$L\{y\}=\frac{6s^4-13s^3-7s^2+4s+4}{s^2(s+1)(s^2-3s+2)}$$

$$L\{y\}=\frac{3}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{2}{s+1}-\frac{2}{s-2}+\frac{3}{s-1}$$

$$y=L\{\frac{3}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{2}{s+1}-\frac{2}{s-2}+\frac{3}{s-1}\}$$

$$y=3+2t+2e^{-t}-2e^{2t}+3e^{t}$$

4) Resolver la ecuación diferencial

$$y''-4y'+5y=125t^2,\quad y(0)=y'(0)=0$$

Solución

Tomando la Transformada de Laplace se tiene.

$L\{y''-4y'+5y\}=L\{125t^2\}$, de donde

$$s^2 L\{y\} - s\,y(0) - y'(0) - 4s\,L\{y\} + 4y(0) + 5L\{y\} = \frac{250}{s^3}$$

$(s^2 - 4s + 5)L\{y\} = \dfrac{250}{s^3}$, despejando L{y} se tiene

$$L\{y\} = \frac{250}{s^3(s^2-4s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds+E}{s^2-4s+5}$$

$$L\{y\} = 250[\frac{11}{125s} + \frac{4}{25s^2} + \frac{1}{5s^3} - \frac{1}{125}(\frac{11s-24}{s^2-4s+5})]$$

$$y(t) = 250L^{-1}\{\frac{11}{125s} + \frac{4}{25s^2} + \frac{1}{5s^3} - \frac{1}{125}(\frac{11s-24}{s^2-4s+5})\}$$

$$= 250(\frac{11}{125} + \frac{4t}{25} + \frac{t^2}{10} - \frac{11}{125}e^{2t}\cos t + \frac{2}{125}e^{2t}\operatorname{sen} t)$$

$$\therefore\ y(t) = 22 + 40t + 25t^2 - 22e^{2t}\cos t + 4e^{2t}\operatorname{sen} t)$$

5) Resolver la ecuación diferencial dada

$$y'' + 9y = 18t\ ,\quad y(0) = 0\ ,\quad y(\frac{\pi}{2}) = 0$$

Solución

Tomando la Transformada de Laplace se tiene:

$L\{y''+9y\} = L\{18t\}$, de donde se tiene:

$$s^2 L\{y\} - sy\{0\} - y'(0) + 9L\{y\} = L\{18t\}$$

$$(s^2+9)\,L\{y\} = \frac{18}{s^2} + y'(0) = \frac{s^2 y'(0) + 18}{s^2}$$

$$L\{y\}=\frac{s^2\,y'(0)+18}{s^2(s^2+9)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{Cs+D}{s^2+9} \qquad \ldots (1)$$

$$\frac{s^2\,y'(0)+18}{s^2(s^2+9)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{Cs+D}{s^2+9}=\frac{A(s^3+9s)+B(s^2+9)+Cs^3+Ds^2}{s^2(s^2+9)}$$

$$s^2y'(0)+18=(A+C)s^3+(B+D)s^2+9As+9B$$

comparando coeficientes de s se tiene:

$$\begin{cases} A+C=0 & A=0 \\ B+D=y'(0) & B=2 \\ \qquad\qquad \Rightarrow & \\ 9A=0 & C=0 \\ 9B=18 & D=Y'(0)-2 \end{cases} \qquad \ldots (2)$$

Ahora reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$L\{y\}=\frac{2}{s^2}+\frac{y'(0)-2}{s^2+9}, \text{ tomando la inversa}$$

$$y=L^{-1}\{\frac{2}{s^2}+\frac{y'(0)-2}{s^2+9}\}=2t\,\frac{y'(0)-2}{3}\operatorname{sen}3t$$

como $\quad y(\frac{\pi}{2})=0\Rightarrow \pi+\frac{y'(0)-2}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}=0\Rightarrow \frac{y'(0)-2}{3}=\pi$

$$\therefore y(t)=2t+\pi\operatorname{sen}3t$$

6) Resolver la ecuación diferencial dada:

$$y''(t)-4y'(t)+3y(t)=F(t)\ ,\ y(0)=1\ ,\ y'(0)=0$$

Solución

Tomando la Transformada de Laplace se tiene:

$L\{y''(t)-4y'(t)+3y(t)\}=L\{F(t)\}$,de donde

$$s^2L\{y(t)\}-sy(0)-y'(0)-4s\,L\{y(t)\}+4y(0)+3L\{y(t)\}=L\{F(t)\}$$

$$(s^2-4s+3)\ L\{y(t)\}=s-4+L\{F(t)\}$$

$$L\{y(t)\}=\frac{s-4+L\{F(t)\}}{s^2+4s+3}\text{, tomando inversa}$$

$$y(t)\ L^{-1}\{\frac{s-4+L\{F(t)\}}{(s-3)(s-1)}\}=L^{-1}\{\frac{s-4}{(s-3)(s-1)}\}+L^{-1}\{\frac{L\{F(t)\}}{(s-3)(s-1)}\}$$

$$=\frac{3}{2}L^{-1}\{\frac{1}{s-1}\}-\frac{1}{2}L^{-1}\{\frac{1}{s-3}\}+L^{-1}\{F(t)\}*L^{-1}\{\frac{1}{(s-3)(s-1)}\}$$

$$y(t)=\frac{3}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{3t}+F(t)*(\frac{e^{3t}}{2}-\frac{e^t}{2})$$

$$y(t)=\frac{3}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}\int_0^t(e^{3u}-e^u)\,F(t-u)du$$

7) Resolver la ecuación diferencial dáda

$$t\,x''(t)-(4t+1)\,x'(t)+2(2t+1)\,x(t)=0\quad,\quad x(0)=0$$

Solución

Tomando la Transformada de Laplace en la ecuación dada

$$L\{t\,x''(t)-(4t+1)\,x'(t)+2(2t+1)\,x(t)\}=0$$

$$-\frac{d}{ds}L\{x''(t)\}+4\frac{d}{ds}L\{x'(t)\}-L\{x'(t)\}4\frac{d}{ds}L\{x(t)\}+2L\{x(t)\}=0$$

$$-\frac{d}{ds}(s^2L\{x'(t)\}-sx(0)-x'(0))+4\frac{d}{ds}(s\,L\{x(t)\}-x(0))-sL\{x(t)\}+x(0)$$

$$-4\frac{d}{ds}L\{x(t)\}+2L\{x(t)\}=0$$

$$-2sL\{x(t)\}-s^2\frac{d}{ds}L\{x(t)\}+x(0)+4L\{x(t)\}+4s\frac{d}{ds}L\{x(t)\}-sL\{x(t)\}$$

$$+x(0)-4\frac{d}{ds}L\{x(t)\}+2L\{x(t)\}=0$$

$$-(s^2-4s+4)\frac{d}{ds}L\{x(t)\}+(3s-6)\,L\{x(t)\}=0$$

$$(s-2)^2\frac{d}{ds}L\{x(t)\}+3(s-2)\,L\{x(t)\}=0$$

$\dfrac{\frac{d}{ds}L\{x(t)\}}{L\{x(t)\}}+\dfrac{3}{s-2}=0$, integrando $\displaystyle\int\frac{\frac{d}{ds}L\{x(t)\}}{L\{x(t)\}}ds+\int\frac{3ds}{s-2}=\ln k$

$$\ln(L\{x(t)\})+\ln(s-2)^3=\ln k$$

$$(s-2)^3\,L\{x(t)\}=k\Rightarrow L\{x(t)\}=\frac{k}{(s-2)^3}$$

$x(t)=k\,L^{-1}\{\dfrac{1}{(s-2)^3}\}=\dfrac{kt^2e^{2t}}{2}$ $\quad\therefore\exists\,x(t)$, $\forall\,k\neq 0$, en particular si k=1, se tiene la Solución $x(t)=\dfrac{t^2}{2}e^{2t}$

8) Resolver la ecuación diferencial

$$y''(t)+y(t)=J_0(t)\ ,\ \ y(0)=y'(0)=0$$

Solución

Tomando la Transformada de Laplace se tiene:

$L\{y''(t)+y(t)\}=L\{J_0(t)\}$,de donde

$$s^2 L\{y(t)\} - sy(0) - y'(0) + L\{y(t)\} = L\{J_0(t)\}$$

$$(s^2+1)\ L\{y(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$, despejando $L\{x(t)\}$

$L\{x(t)\} = \dfrac{1}{(s^2+1)^{3/2}}$, tomando inversa se tiene: $y(t) = L^{-1}\{\dfrac{1}{(s^2+1)^{3/2}}\}$, de acuerdo al ejercicio (20) de la transformada inversa se tiene: $y(t) = L^{-1}\{\dfrac{1}{(s^2+1)^{3/2}}\} = tJ_1(t)$

$$\therefore\ y(t) = tJ_1(t)$$

9) Resolver la ecuación diferencial dada por:

$$y''(t) + ty'(t) - y(t) = 0\ ,\ y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 1$$

Solución

Tomando la Transformada de Laplace se tiene:

$L\{y''(t) + ty'(t) - y(t)\} = 0$, de donde:

$$s^2 L\{y(t)\} - sy(0) - y'(0) - \frac{d}{ds} L\{y'(t)\} - L\{y(t)\} = 0$$

$$s^2 L\{y(t)\} - 1 - \frac{d}{ds}(sL\{y(t) - y(0)\} - L\{y(t)\} = 0$$

$$s^2 L\{y(t)\} - 1 - L\{y(t)\} - s\frac{d}{ds} L\{y(t)\} - L\{y(t)\} = 0$$

$$-s\frac{d}{ds} L\{y(t)\} + (s^2-2)\ L\{y(t)\} = 1$$

$\dfrac{d}{ds} L\{y(t)\} - \dfrac{s^2-2}{s} L\{y(t)\} = -\dfrac{1}{s}$, ecuación lineal

$$L\{y(t)\}=e^{-\int -\frac{s^2-2}{s}ds}\left[\int e^{\int -\frac{s^2-2}{s}ds}\left(-\frac{ds}{s}\right)+c\right]=e^{\frac{s^2}{2}-2\ln s}\left[-\int e^{-s^2/2+2\ln s}\frac{ds}{s}+c\right]$$

$$=\frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s^2}\left[-\int e^{-s^2/2}s\,ds+c\right]=\frac{e^{s^2/2}}{s^2}\left[e^{-s^2/2}+c\right]=\frac{1}{s^2}+c.\frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{s^2}$$

Por el teorema del valor inicial se tiene:

$$0=y(0)=\lim_{t\to 0}y(t)=\lim_{s\to\infty}sy(s)=\lim_{s\to\infty}\left(\frac{1}{s}+c.\frac{e^{s^2/2}}{s}\right)=0$$

luego $\lim\limits_{s\to\infty}\frac{1}{s}+c.\frac{e^{s^2/2}}{s}=0\Rightarrow c=0$, entonces $L\{y(t)\}=\frac{1}{s^2}$, tomando la inversa se tiene:

$$L\{y(t)\}=\frac{1}{s^2}\text{ de donde }y(t)=L^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}=t$$

$$\therefore y(t)=t$$

10) Resolver la ecuación diferencial dada

$$ty''(t)+(1-2t)y'(t)-2y(t)=0\ ,\ \ y(0)=1\ ,\ \ y'(0)=2$$

<u>Solución</u>

Tomando la Transformada de Laplace en la ecuación dada

$L\{t\,y''(t)+(1-2t)y'(t)-2y(t)\}=0$, de donde :

$$-\frac{d}{ds}L\{y''(t)\}+L\{y'(t)\}+2\frac{d}{ds}L\{y'(t)\}-2L\{y(t)\}=0$$

$$-\frac{d}{ds}(s^2L\{y(t)\}-sy(0)-y'(0)+sL\{y(t)\}-y(0)+2\frac{d}{ds}(sL\{y(t)\}-y(0))-2L\{y(t)\}=0$$

$$-2sL\{y(t)\}-s^2\frac{d}{ds}L\{y(t)\}+1+sL\{y(t)\}-1+2L\{y(t)\}+2s\frac{d}{ds}L\{y(t)\}-2L\{y(t)\}=0$$

$$-(s^2-2s)\frac{d}{ds}L\{y(t)\}-sL\{y(t)\}=0$$

$$\frac{-\frac{d}{ds}L\{y(t)\}}{L\{y(t)\}}+\frac{s}{s^2-2s}=0$$, integrando, $$\int\frac{\frac{d}{ds}L\{y(t)\}}{L\{y(t)\}}+ds+\int\frac{ds}{s-2}=\ln k$$

$$\ln(L\{y(t)\})+\ln(s-2)=\ln k$$

$\ln(L\{y(t)\})+\ln(\frac{k}{s-2}$, de donde : $\ln L\{y(t)\}=\frac{k}{s-2}$, aplicando el teorema del valor inicial se tiene: $1=y(0)=\lim_{t\to 0}y(t)=\lim_{s\to\infty}sy(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{ks}{s-2}=k$, entonces $L\{y(t)\}=\frac{1}{s-2}$, tomando inversa $y(t)=L^{-1}\{\frac{1}{s-2}\}=e^{2t}$, por lo tanto, la solución es: $y(t)=e^{2t}$.

11) Para que valores de A y B se tendrá que $F(0)=1$, $F'(0)=3$ siendo $H(s)=\frac{s^2+As-B}{s^3-s}$ y $F(t)=L^{-1}\{H(s)\}$.

Solución

Descomponiendo en fracciones H(s) se tiene:

$$H(s)=\frac{s^2+As-B}{s^3-s}=\frac{M}{s}+\frac{N}{s-1}+\frac{R}{s+1}$$, de donde:

$$M=\lim_{s\to\infty}\frac{s^2+As-B}{(s-1)(s+1)}=\frac{-B}{-1}=B\Rightarrow M=B$$

$$N=\lim_{s\to 1}\frac{s^2+As-B}{s(s+1)}=\frac{1+A-B}{2}\Rightarrow N=\frac{1+A-B}{2}$$

$$R = \lim_{s\to 1} \frac{s^2 + As - B}{s(s-1)} = \frac{1-A-B}{2(s+1)}$$

Luego $H(s) = \frac{B}{s} + \frac{1+A-B}{2(s-1)} + \frac{1-A-B}{2(s+1)}$

$$F(t) = L^{-1}\{H(s)\} = L^{-1}\{\frac{B}{s} + \frac{1+A-B}{2(s-1)} + \frac{1-A-B}{2(s+1)}\}$$

$$F(t) = B + \frac{1+A-b}{2}e^t + \frac{1-A-B}{2}e^{-t}$$

$$F(0) = 1 = B + \frac{1+A-B}{2} - \frac{1-A-B}{2}$$

$$F'(t) = \frac{1+A-B}{2}e^t - \frac{1-A-B}{2}e^{-t}$$

$$F'(0) = 3 = \frac{1+A-B}{2} - \frac{1-A-B}{2} \Rightarrow A = 3$$

Además $1 = B + 2 - \frac{B}{2} - 1 - \frac{B}{2} = 1$ (verdadero), entonces $F(t) = B + \frac{4-B}{2}e^t - \frac{2+B}{2}e^{-t}$ para A=3 y para cualquier valor de B.

13) Resolver la ecuación diferencial dada por:

$y''(t) + 2y'(t) = f(t)$, $y(0) = y'(0) = 0$, donde:

$$f(t) = \begin{cases} 1 \ si & \pi < t < 2\pi \\ 0 \ si & 0 < t < \pi \\ 0 \ si & t > 2\pi \end{cases}$$

<u>Solución</u>

La función F(t) es lo mismo expresarlo así

$$f(t)=\begin{cases}0 & si \quad 0<t<\pi \\ 1 & si \quad \pi<t<2\pi \\ 0 & si \quad t>2\pi\end{cases}$$

Ahora la función f(t) expresaremos en términos de la función escalón unidad.

$f(t)=\mu(t-\pi)-\mu(t-2\pi)$, de donde

$L\{f(t)\}=\dfrac{e^{-\pi s}}{s}-\dfrac{e^{-2\pi s}}{s}$, además $L\{y''(t)+2y'(t)\}=L\{f(t)\}$

$$s^2L\{y(t)\}-sy(0)-y'(0)+2sL\{y(t)\}-2y(0)=L\{f(t)\}$$

$(s^2+2s)L\{y(t)\}=\dfrac{e^{-\pi s}-e^{-2\pi s}}{s}$, de donde

$L\{y(t)\}=\dfrac{e^{-\pi s}-e^{-2\pi s}}{s^2(s+2)}$, tomando la inversa

$$y(t)=L^{-1}\{\frac{e^{-\pi s}-e^{-2\pi s}}{s^2(s+2)}\}$$

$$=[(t-\pi)+e^{-(t-\pi)}-1]\mu(t-\pi)-[(t-2\pi)+e^{-(t-2\pi)}]\mu(t-2\pi)$$

$$y(t)=[t-\pi-1+e^{-(t-\pi)}]\mu(t-\pi)-[t-2\pi-1+e^{-(t-2\pi)}]\mu(t-2\pi)$$

Nota: $L^{-1}\{\dfrac{1}{s^2(s+2)}\}=t+e^{-t}-1$

13) Resolver la ecuación diferencial dada por:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y(t)=\begin{cases}0 & , \ t\le 2 \\ e^{-(t-1)} & , \ t>2\end{cases}, \quad \text{donde: } y(0)=1\ ,\ y'(0)=-1$$

Solución

Encontraremos la solución para $t \leq 2$, $L\{\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y(t)\}=0$, de donde:

$$s^2L\{y(t)\}-sy(0)-y'(0)+4sL\{y(t)\}-4y(0)+4L\{y(t)\}=0$$

$(s^2+4s+4)L\{y(t)\}=s+3$, despejando $L\{y(t)\}$

$L\{y(t)\}=\frac{s+3}{(s+2)^2}$, ahora tomando la inversa

$$y(t)=L^{-1}\{\frac{s+3}{(s+2)^2}\}=te^{-2t}+e^{-2t}$$

Ahora veremos la solución para $t > 2$.

$$L\{\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y(t)\}=L\{e^{-(t-2)}\}$$

$$(s+2)^2L\{y(t)\}-(s+3)=\frac{e^2}{s+1}$$

$L\{y(t)\}=\frac{s+3}{(s+2)^2}+\frac{e^2}{(s+2)^2(s+1)}$, tomando la inversa

$$y(t)=L^{-1}\{\frac{s+3}{(s+2)^2}+\frac{e^2}{(s+2)(s+1)}\}=e^{-2t}+te^{-2t}+e^2(e^{-t}-e^{-2t}-te^{-2t})$$

Luego la solución de la ecuación diferencial es:

$$y(t)=\begin{cases} te^{-2t}+e^{-2t} & ,\ para\ t\leq 2 \\ (t+1)e^{-2t}+e^{-(t-2)}-(t-1)e^{-2(t-1)} & ,\ para\ t>2 \end{cases}$$

14) Resolver la ecuación diferencial dado por

$$t\,x''(t) + x'(t) - a^2 tx(t) = 0 \ , \ x(0) = k \ , \ x'(0) = 0 \ , \ a \neq 0$$

Solución

Tomando la Transformada de Laplace

$$L\{tx''(t) + x'(t) - a^2 tx(t)\} = 0 = \frac{d}{ds} L\{x''(t)\} + L\{x'(t)\} + a^2 \frac{d}{ds} L\{x(t)\} = 0$$

$$-\frac{d}{ds}(s^2 L\{x(t)\} - sx(0) - x'(0)) + sL\{x(t)\} - x(0) + a^2 \frac{d}{ds} L\{x(t)\} = 0$$

$$-2sL\{x(t)\} - s^2 \frac{d}{ds} L\{x(t)\} + x(0) + sL\{x(t)\} - x(0) + a^2 \frac{d}{ds} L\{x(t)\} = 0$$

$$-(s^2 - a^2)\frac{d}{ds} L\{x(t)\} - sL\{x(t)\} = 0$$

$$\frac{\frac{d}{ds} L\{x(t)\}}{L\{x(t)\}} + \frac{s}{s^2 - a^2} = 0 \text{, integrando } \ln(L\{x(t)\} + \frac{1}{2}\ln(s^2 - a^2) = \ln c$$

$$\ln\sqrt{s^2 - a^2}\, L\{x(t)\} = \ln c \text{ entonces } L\{x(t)\} = \frac{c}{\sqrt{s^2 - a^2}}$$

Aplicando teorema del valor inicial

$$\lim_{s \to \infty} \frac{sc}{\sqrt{s^2 - a^2}} = \lim_{t \to 0} x(t) = x(0) = k$$

$$\lim_{s \to \infty} \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{s^2}}} = k \Rightarrow c = k$$

17) Resolver para $x(t);F(t)=\int_0^t (t-u)^{-p}x'(u)du \quad , 0<p<1$

Solución

$$F(t)=\int_0^t (t-u)^{-p}x'(u)du=t^{-p}*x'(t)\ ,\ 0<p<1$$

Tomando la Transformada de Laplace

$$L\{F(t)\}=L\{t^{-p}*x'(t)\}=L\{t^{-p}\}L\{x'(t)\}$$

si $L\{F(t)\}=f(s)$, entonces se tiene:

$$f(s)=L\{t^{-p}\}L\{x'(t)\}=\frac{\Gamma(1-p)}{s^{1-p}}(s\,x(s)-x(0))f(s)+\frac{\Gamma(1-p)}{s^{1-p}}x(0)=\frac{\Gamma(1-p)\,s\,x(s)}{s^{1-p}}$$

$$x(s)=\frac{s^{1-p}f(s)}{s\Gamma(1-p)}+\frac{x(0)}{s}=\frac{f(s)}{s^p\Gamma(1-p)}+\frac{x(0)}{s}$$

$$x(t)=L^{-1}\{\frac{f(s)}{s^p\Gamma(1-p)}+\frac{x(0)}{s}\}$$

$$x(t)=\frac{1}{\Gamma(1-p)}L^{-1}\{\frac{f(s)}{s^p}\}+x(0)=\frac{1}{\Gamma(1-p)}L^{-1}\{f(s)\}*L^{-1}\{\frac{1}{s^p}\}+x(0)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-p)}F(t)*\frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)}+x(0)=\frac{\operatorname{sen} p\pi}{\pi}F(t)*t^{p-1}+x(0)$$

$$\therefore x(t)=\frac{\operatorname{sen} p\pi}{\pi}F(t)*t^{p-1}+x(0)$$

18) Resolver sistema de ecuación diferencial $\begin{cases} x''(t)+y'(t)+3x(t)=15e^t \\ y''(t)-4x'(t)+3y(t)=15\operatorname{sen}2t \end{cases}$

con las condiciones $x(0)=35$, $x'(0)=-48$, $y(0)=27$, $y'(0)=-55$

Solución

Tomando la Transformada de Laplace a cada ecuación

$$\begin{cases} L\{x''(t)+y'(t)+3x(t)\} = L\{15e^{-t}\} \\ L\{y''(t)-4x'(t)+3y(t)\} = L\{15\operatorname{sen}2t\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2L\{x(t)\}-sx(0)-x'(0)+sL\{y(t)\}-y(0)+3L\{x(t)\} = 15L\{e^{-t}\} \\ s^2L\{y(t)\}-sy(0)-y'(0)-4sL\{x(t)\}+4x(0)+3L\{y(t)\} = 15L\{\operatorname{sen}2t\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s+3)L\{x(t)\}+sL\{y(t)\} = 35s-21+\dfrac{15}{s+1} \\ -4sL\{x(t)\}+(s^2+3)L\{y(t)\} = 27s-19s+\dfrac{30}{s^2+4} \end{cases}$$

Aplicando la regla de CRAMER se tiene:

$$L\{y(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} 35s-21+\dfrac{15}{s+1} \\ 27s-19s+\dfrac{30}{s^2+4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+3 & s \\ -4s & s^2+3 \end{vmatrix}} = \frac{30s}{s^2+1}-\frac{45}{s^2+9}+\frac{3}{s+1}+\frac{2s}{s^2+4}$$

$$x(t) = L^{-1}\{\frac{30s}{s^2+1}-\frac{45}{s^2+9}+\frac{3}{s+1}+\frac{2s}{s^2+4}\}$$

$$\therefore\ x(t) = 3\cos t - 15\operatorname{sen}3t + 3e^{-t} + 2\cos 2t$$

$$L\{y(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} s^2+3 & 35s-21+\dfrac{15}{s+1} \\ -4s & 27s-19s+\dfrac{30}{s^2+4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+3 & s \\ -4s & s^2+3 \end{vmatrix}} = \frac{30s}{s^2+1}-\frac{60}{s^2+1}+\frac{3}{s+1}+\frac{2}{s^2+4}$$

$$y(t) = L^{-1}\{\frac{30s}{s^2+1} - \frac{60}{s^2+1} + \frac{3}{s+1} + \frac{2}{s^2+4}\}$$

$$\therefore \quad y(t) = 30\cos t - 60\,\text{sen}\,t + 3e^{-t} + \text{sen}\,2t$$

19) Resolver el sistema de ecuación diferenciales $\begin{cases} 2x'(t)+2x(t)+y'(t)-y(t)=3t \\ x'(t)+\ x(t)+y'(t)+y(t)=1 \end{cases}$, con las condiciones x(0)=1 , y(0)=3

Solución

Aplicando la Transformada de Laplace a cada ecuación

$$\begin{cases} L\{2x'(t)+2x(t)+y'(t)-y(t)\} = L\{3t\} \\ L\{x'(t)+x(t)+y'(t)+y(t)\} = L\{1\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2sL\{x(t)\} - 2x(0) + 2L\{x(t)\} + sL\{y(t)\} - y(0) - L\{y(t)\} = \dfrac{3}{s^2} \\ sL\{x(t)\} - x(0) + L\{x(t)\} - y(0) + L\{y(t)\} = \dfrac{1}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(s+1)L\{x(t)\} + (s-1)L\{y(t)\} = \dfrac{3}{s^2}+5 \\ (s+1)L\{x(t)\} + (s+1)L\{y(t)\} = \dfrac{1}{s}+4 \end{cases}$$

$$L\{x(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{3}{s^2}+5 & s-1 \\ \frac{1}{s}+4 & s+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(s+1) & s-1 \\ s+1 & s+1 \end{vmatrix}} = \frac{s^3+8s^2+4s+3}{s^2(s^2+4s+3)} = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s+3} + \frac{3}{s+1}$$

$$x(t) = L^{-1}\{\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s+3} + \frac{3}{s+1}\} = t - 2e^{-3t} + 3e^{-t}$$

$$\therefore \quad x(t) = t - 2e^{-3t} + 3e^{-t}$$

$$L\{x(t)\} = \frac{\begin{vmatrix} 2(s+1) & \frac{2}{s^2}+5 \\ s+1 & \frac{1}{s}+4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(s+1) & s-1 \\ s+1 & s+1 \end{vmatrix}} = \frac{3s^3+5s^2-s-3}{2s^2(s^2+4s+3)} = \frac{3s^2+2s-3}{s^2(s+3)}$$

$$y(t) = L^{-1}\{\frac{3s^2+2s-3}{s^2(s+3)}\} = L^{-1}\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s+3}\} = 1-t+2e^{-3t}$$

$$\therefore \quad y(t) = 1-t+2e^{-3t}$$

20) **Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales.**

$\begin{cases} x''(t)-x(t)+5y'(t)=t \\ y''(t)-4y(t)-2x'(t)=-2 \end{cases}$, **con las condiciones iniciales siguientes.**

$x(0)=0,\ \ x'(0)=0,\ y(0)=0,\ \ y'(0)=0$

Solución

Aplicando la Transformada de Laplace a cada ecuación

$$\begin{cases} L\{x''(t)-x(t)+5y'(t)\} = L\{t\} \\ L\{y''(t)-4y(t)-2x'(t)\} = L\{-2\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2L\{x(t)\}-s\,x(0)-x'(0)-L\{x(t)\}+5sL\{y(t)\}-5y(0)=\frac{1}{s^2} \\ s^2L\{y(t)\}-s\,x(0)-x'(0)-4L\{y(t)\}-2sL\{x(t)\}+2x(0)=-\frac{2}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s^2+1)L\{x(t)\}-5sL\{y(t)\}=\frac{1}{s^2} \\ -2sL\{x(t)\}+(s^2-4)L\{y(t)\}=-\frac{2}{s} \end{cases}$$

Aplicando el teorema de CRAMER

$$L\{x(t)\}=\frac{\begin{vmatrix}\frac{1}{s^2} & 5s\\ -\frac{2}{s} & s^2-4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s^2+1 & 5s\\ -2s & s^2-4\end{vmatrix}}=\frac{11s^2-4}{s^2(s^2+1)(s^2+4)}=-\frac{1}{s^2}+\frac{5}{s^2+1}-\frac{4}{s^2+4}$$

$$x(t)=L^{-1}\{-\frac{1}{s^2}+\frac{5}{s^2+1}-\frac{4}{s^2+4}\}=\{t+5\operatorname{sen}t-2\operatorname{sen}2t\}$$

$$\therefore\quad x(t)=-t+5\operatorname{sen}t-2\operatorname{sen}2t$$

$$L\{y(t)\}=\frac{\begin{vmatrix}s^2+1 & \frac{1}{s^2}\\ -2s & -\frac{2}{s}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s^2+1 & 5s\\ -2s & s^2-4\end{vmatrix}}=\frac{-2s^2+4}{s(s^2+1)(s^2+4)}=\frac{1}{s}-\frac{2s}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+4}$$

$$y(t)=L^{-1}\{\frac{1}{s}-\frac{2s}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+4}\}=t-2\cos t+\cos 2t$$

$$\therefore\quad y(t)=t-2\cos t+\cos 2t$$

21) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\begin{cases}x''(t)+2x(t)-y'(t)=2t+5\\ x'(t)-x(t)+y'(t)+y(t)=-2t-1\end{cases}$$

con las condiciones iniciales x(0) = 3, $x'(0)=0$, y(0) = -3

Solución

Aplicando la Transformada de Laplace a cada ecuación.

$$\begin{cases} L\{x''(t)+2x(t)-y'(t)\}=L\{2t+5\} \\ L\{x'(t)-x(t)+y'(t)+y(t)\}=L\{-2t-1\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2 L\{x(t)\}-s\,x(0)-x'(0)+2L\{x(t)\}-sL\{y(t)\}+y(0)=L\{2t+5\} \\ sL\{x(t)\}-x(0)-L\{x(t)\}+sL\{y(t)\}-y(0)+L\{y(t)\}=L\{-2t-1\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s^2+2)L\{x(t)\}-sL\{y(t)\}=\dfrac{2}{s^2}+\dfrac{5}{s}+3s+3 \\ (s+1)L\{x(t)\}+(s+1)L\{y(t)\}=-\dfrac{2}{s^2}-\dfrac{1}{s} \end{cases}$$

Aplicando la regla de CRAMER

$$L\{x(t)\}=\frac{\begin{vmatrix} \frac{2}{s^2}+\frac{5}{s}+3s+3 & -s \\ -\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s} & s+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+2 & -s \\ s-1 & s+1 \end{vmatrix}}=\frac{3s^4+6s^3+7s^2+5s+2}{s^2(s^3+2s^2+s+2)}$$

$L\{x(t)\}=\dfrac{2}{s}+\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{1}{s^2+1}$, tomando inversa

$$x(t)=L^{-1}\{\frac{2}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s^2+1}\}$$

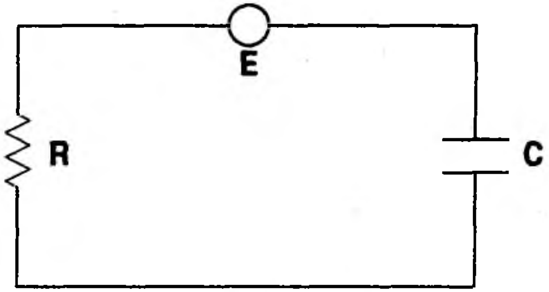
$$\therefore\quad x(t)=2+t+e^{-2t}+\operatorname{sen} t$$

igual modo se obtiene y(t) es decir.

$$\therefore\quad y(t)=1-t-3e^{-2t}+\cos t$$

22) Se conectan en serie una resistencia de R ohmios y un condensador de C faradios con un generador de E voltios (ver figura) en t = 0 la carga del condensador es cero. Hallar la carga y la corriente en cualquier tiempo t > 0, si.

a) $E = E_0$ constante **b)** Si $E = E_0 e^{-\alpha t}$



Solución

a) Dado del problema

circuito R - C Capacidad = C faradios

Resistencia = R ohmios Generador = E voltios

en t = 0, Q(0) = 0, de acuerdo a la segunda ley de KIRCHOFF y condición del problema se tiene: $RI + \frac{Q}{C} = E_0 \Rightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{E_0}{R}$, ecuación lineal aplicando transformada de Laplace se tiene: $L\{\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC}Q\} = L\{\frac{E_0}{R}\}$, de donde

$$s\,L\{Q(t)\} - Q(0) + \frac{1}{RC}L\{Q(t)\} = \frac{E_0}{RS}$$

$(S + \frac{1}{RC})L\{Q(t)\} = \frac{E_0}{RS}$, despejando L{Q(t)}

$L\{Q(t)\} = \frac{E_0}{RS(S + \frac{1}{RC})}$, tomando transformada inversa.

$$Q(t)=L^{-1}\{\frac{E_0}{RS(S+\frac{1}{RC})}\}=\frac{E_0}{R}L^{-1}\{\frac{1}{S(S+\frac{1}{RC})}\}$$

$$Q(t)=E_0C(1-e^{-t/RC}) \text{ como } I=\frac{dQ(t)}{dt}=\frac{E_0}{R}e^{-t/RC}$$

$$\therefore \quad I=\frac{E_0}{R}e^{-t/RC}$$

b) Datos del problema.

Circuito R - C , Resistencia = R ohmios

Capacidad = C faradios , Generador = E voltios

para t = 0 $\Rightarrow$ Q(0) = 0, de acuerdo a la segunda Ley de Kirchoff y condiciones del problema se tiene.

$$RI+\frac{Q}{C}=E_0e^{-\alpha t}\text{, donde } I=\frac{dQ(t)}{dt}$$

Luego $R\frac{dQ(t)}{dt}+\frac{Q(t)}{C}=E_0e^{-\alpha t}$, de donde

$\frac{dQ(t)}{dt}+\frac{1}{RC}Q(t)=\frac{E_0e^{-\alpha t}}{R}$, ecuación lineal aplicando transformada de Laplace se tiene:

$$L\{\frac{dQ(t)}{dt}+\frac{1}{RC}Q(t)\}=L\{\frac{E_0e^{-\alpha t}}{R}\}$$

$$s\,L\{Q(t)\}-Q(0)+\frac{1}{RC}L\{Q(t)\}=\frac{E_0}{R(s+\alpha)}$$

$(s+\frac{1}{RC})\,L\{Q(t)\}=\frac{E_0}{R(s+\alpha)}$, despejando L{Q(t)}

$L\{Q(t)\}=\frac{E_0}{R(S+\frac{1}{RC})(s+\alpha)}$, tomando inversa

$$Q(t)=L^{-1}\{\frac{E_0}{R(S+\frac{1}{RC})(s+\alpha)}\}=\frac{E_0}{R}L^{-1}\{\frac{1}{(S+\frac{1}{RC})(s+\alpha)}\}$$

$$Q(t)=\frac{CE_0}{1-RC}L^{-1}\{\frac{1}{s+\alpha}-\frac{1}{S+\frac{1}{RC}}\}=\frac{CE_0}{1-RC}(e^{-\alpha t}-e^{-t/RC})$$

$$I(t)=\frac{dQ(t)}{dt}=\frac{E_0C}{1-RC}(\frac{e^{-t/RC}}{RC}-\alpha e^{-\alpha t})$$

23) Desarrollar el problema 22) para el caso en que $E=E_0 \operatorname{sen}\omega t$ y la carga del condensador se a Q_0.

Solución

Datos del problema

$Q(0)=Q_0$, $E=E_0 \operatorname{sen}\omega t$, Resistencia = R ohmios

Capacidad = C faradios, de la condición del problema se tiene.

$$\frac{dQ(t)}{dt}+\frac{1}{RC}Q(t)=\frac{E_0 \operatorname{sen}\omega t}{R}$$

aplicando transformada de Laplace se tiene.

$$L\{\frac{dQ(t)}{dt}+\frac{1}{RC}Q(t)\}=L\{\frac{E_0 \operatorname{sen}\omega t}{R}\}$$

$$sL\{Q(t)\}-Q(0)+\frac{1}{RC}L\{Q(t)\}=\frac{E_0}{R}.\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$(S+\frac{1}{RC})L\{Q(t)\}=Q_0+\frac{E_0\omega}{s^2+\omega^2}$, despejando L{Q(t)}

$$L\{Q(t)\} = \frac{Q_0}{S+\frac{1}{RC}} + \frac{E_0\omega}{(S+\frac{1}{RC})(s^2+\omega^2)}$$, tomando inversa

$$Q(t) = L^{-1}\{\frac{Q_0}{S+\frac{1}{RC}} + \frac{E_0\omega}{(S+\frac{1}{RC})(s^2+\omega^2)}\}$$, de donde

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC} + \frac{E_0}{R}[\frac{R^2C^2}{1+\omega^2R^2C^2}(\frac{\operatorname{sen}\omega t}{RC} - \omega\cos\omega t) + \frac{\omega R^2C^2e^{-t/RC}}{1+\omega^2R^2C^2}]$$

$$Q(t) = (Q_0 + \frac{\omega E_0 RC}{1+\omega^2R^2C^2})e^{-t/RC} - \frac{E_0}{R}(\frac{\omega R^2C^2\cos\omega t - RC\operatorname{sen}\omega t}{1+\omega^2R^2C^2})$$

24) Un inductor de L henrys y un condensador de C faradios están conectados en serie con un condensador de E voltios. En t = 0, la carga del condensador y la corriente del circuito son nulos. Hallar la carga del condensador en cualquier tiempo t > 0.

a) Si $E = E_0$ constante **b)** $E = E_0 e^{-\alpha t}$ $\alpha > 0$

<u>Solución</u>

a) Datos por el problema

Inductancia : L Henrys

Capacidad : C faradios

Resistencia : R = 0 , $E = E_0$ de la segunda ley de Kirchoff se tiene:

$$L\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{c}\int_0^t I(r)dr = V(t)$$, de donde

$$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{LC}\int_0^t I(r)dr = \frac{E_0}{L}$$

aplicando transformada de Laplace se tiene

$$L\{\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{LC}\int_0^t I(r)dr\} = L\{\frac{E_0}{L}\}$$

$$s\,L\{I(t)\} - I(0) + \frac{1}{LC}\frac{L\{I(t)\}}{s} = \frac{E_0}{Ls}$$

$$(S+\frac{1}{LCS})L\{I(t)\} = \frac{E_0}{LS}$$, despejando L{I(t)}

$$L\{Q(t)\} = \frac{E_0}{L(S^2+\frac{1}{LC})}$$, tomando la inversa

$$Q(t) = L^{-1}\{\frac{E_0}{L(S^2+\frac{1}{LC})}\} = \frac{E_0\sqrt{CL}}{L}\operatorname{sen}(\frac{t}{\sqrt{RL}})$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = I(t) = \frac{E_0\sqrt{CL}}{L}\operatorname{sen}(\frac{t}{\sqrt{RL}})$$

$$Q(t) = \frac{E_0\sqrt{CL}}{L}\int \operatorname{sen}(\frac{t}{\sqrt{RC}})dt$$

$$Q(t) = -E_0C.\cos(\frac{t}{\sqrt{RC}})+k$$ para Q(0) = 0

entonces $0 = -E_0C + k \;\Rightarrow\; k = E_0C$

$$\therefore\; Q(t) = E_0C$$

$$\therefore\; Q(t) = E_0C(1+\cos(\frac{t}{\sqrt{CL}})$$

b) Datos del problema

Resistencia: R = 0 ; Inductancia : L Henrys

Capacidad : C faradios , $E = E_0 e^{-\alpha t}$, α > 0, para t = 0, Q(0) = 0, I(0) = 0, por la segunda ley de Kirchoff se tiene:

$$L\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{c}\int_0^t I(r)dr = E_0 e^{-\alpha t}$$

$$Q''(t)+\frac{1}{LC}Q(t)=\frac{E_0}{L}e^{-\alpha t}$$

aplicando transformada de Laplace

$$L\{Q''(t)+\frac{1}{LC}Q(t)\} = L\{\frac{E_0}{L}e^{-\alpha t}\}, \text{ de donde}$$

$$(s^2+\frac{1}{LC})L\{Q(t)\} = \frac{E_0}{L(s+\alpha)}, \text{ despejando } L\{Q(t)\}$$

$$L\{Q(t)\} = \frac{E_0}{L(S+\alpha)(S^2+\frac{1}{LC})}, \text{ tomando inversa}$$

$$Q(t)=\frac{E_0}{L}L^{-1}\{\frac{1}{(S+\alpha)(S^2+\frac{1}{LC})}\} = \frac{E_0}{L}L^{-1}\{\frac{A}{s+\alpha}+\frac{Bs+D}{s^2+\frac{1}{LC}}\}$$

de donde efectuando operaciones se tiene

$$Q(t)=\frac{E_0}{L(\alpha^2+\frac{1}{LC})}(e^{-\alpha t}-\cos(\frac{t}{\sqrt{LC}}))+\frac{\alpha E_0\sqrt{C/L}\,\text{sen}(t/\sqrt{LC})}{\alpha^2+\frac{1}{LC}}$$

25) Desarrollar el problema 24) si E(t) es $E_0\delta(t)$ donde δ(t) es la función Delta De Diroc.

Solución

De las condiciones del problema se tiene.

$$L\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{c}\int_0^t I(r)dr = E \text{ , luego}$$

$$\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{LC}\int_0^t I(r)dr = \frac{E_0\delta(t)}{L}$$

aplicando transformada de Laplace se tiene.

$$L\{\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{LC}\int_0^t I(r)dr\} = L\{\frac{E_0\delta(t)}{L}\}$$

$$s\,L\{I(t)\}-I(0)+\frac{1}{LC}\frac{L\{I(t)\}}{s}=\frac{E_0}{L}$$

$$(s+\frac{1}{LCs})L\{I(t)\}=\frac{E_0}{L} \text{ , despejando L\{I(t)\}}$$

$$L\{I(t)\}=\frac{E_0 s}{L(s^2+\frac{1}{LC})} \text{ , tomando inversa}$$

$$I(t)=\frac{E_0}{L}L^{-1}\{\frac{s}{s^2+\frac{1}{LC}}\}=\frac{E_0}{L}\cos(\frac{t}{\sqrt{LC}})$$

como $\frac{dQ(t)}{dt}=I(t)=\frac{E_0}{L}\cos(\frac{t}{\sqrt{LC}})$, integrando

$$Q(t)=\frac{E_0}{L}\sqrt{LC}\,\text{sen}(\frac{t}{\sqrt{LC}})+k \text{ , para Q(0) = 0} \Rightarrow \text{k = 0}$$

$$\therefore \quad Q(t)=E_0\sqrt{\frac{C}{L}}\,\text{sen}(\frac{t}{\sqrt{LC}})$$

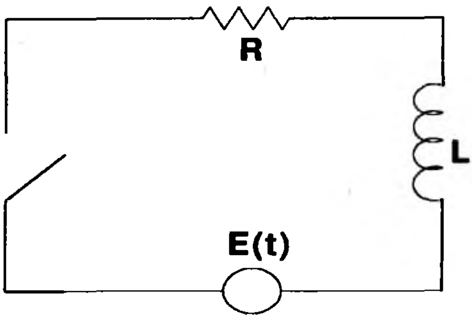
26) Un inductor de 3 Henrys esta en serie con una resistencia de 3 ohmios y una f.e.m. de 150 voltios, suponiendo que es t = 0, la corriente es cero, halle la corriente en cualquier tiempo t > 0.

<u>Solución</u>

Datos del problema.

Inductancia : 3 henrys, Resistencia : 30 ohmios.

t = 0, I(0) = 0, f.e.m. : 150 voltios



$$L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = E \text{, de donde}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L}I(t) = \frac{E}{L} \text{, aplicando transformada}$$

$$L\{\frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L}I(t)\} = L\{\frac{E}{L}\} \text{, de donde}$$

$$s\,L\{I(t)\} - I(0) + \frac{R}{L}L\{I(t)\} = \frac{E}{LS}$$

$$(s + \frac{R}{L})L\{I(t)\} = \frac{E}{LS} \text{, despejando L\{I(t)\}}$$

$$L\{I(t)\}=\frac{E}{LS(s+\frac{R}{L})}=\frac{E}{L}(\frac{A}{s}+\frac{B}{s+\frac{R}{l}})\text{, tomando inversa}$$

$$I(t)=\frac{E}{L}L^{-1}\{(\frac{A}{s}+\frac{B}{s+\frac{R}{l}})\}=\frac{E}{R}(1-e^{-Rt/L})$$

como E = 150, R = 30, L = 3 se tiene

$$I(t)=5(1-e^{-10t})$$

27) Resolver el problema 26) si la f.e.m. es 150 sen 20t

Solución

Datos del problema: f.e.m. = 150 sen 20t

Inductancia = 3 Henrys ; Resistencia = 30 ohmios

su ecuación correspondiente es:

$$L\frac{dI(t)}{dt}+RI(t)=E\text{, de donde}$$

$$\frac{dI(t)}{dt}+\frac{R}{L}I(t)=\frac{E}{L}\text{, aplicando transformada}$$

$$L\{\frac{dI(t)}{dt}+\frac{R}{L}I(t)\}=L\{\frac{E}{L}\}\text{, entonces}$$

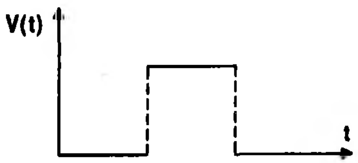
$$s\,L\{I(t)\}-I(0)+\frac{R}{L}L\{I(t)\}=L\{\frac{150\,\text{sen}\,20t}{L}\}\text{, despejando L\{I(t)\}}$$

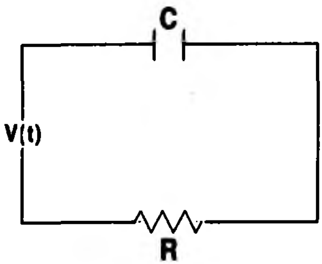
$$L\{I(t)\}=\frac{1000}{(s+\frac{R}{L})(s^2+400)}\text{, tomando la inversa}$$

$$I(t) = 1000L^{-1}\{\frac{1}{(s+\frac{R}{L})(s^2+400)}\} = 2e^{-10t} + 2\,\text{sen}\,20t - 2\cos 20t$$

$$\therefore \quad I(t) = 2e^{-10t} + 2\,\text{sen}\,20t - 2\cos 20t$$

28) Hallar la corriente I(t) que fluye en el circuito de la figura mostrada, si se aplica una onda cuadrada con voltaje de altura V_0. Se supone que el circuito no esta perturbado antes de aplicar la onda cuadrada.





Solución

La ecuación del circuito es:

$$L.I'(t) + RI(t) + \frac{1}{C}\int_0^t I(r)dr = V(t)$$

del circuito L = 0 y aplicamos la transformada

$$L\{RI(t) + \frac{1}{c}\int_0^t I(r)dr\} = L\{V(t)\}$$

$$RL\{I(t)\} + \frac{1}{CS}L\{I(t)\} = L\{V_0(U_a(t) - U_b(t)\}$$

$$(s+\frac{1}{RC})L\{I(t)\} = V_0(\frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s})$$

$$L\{I(t)\} = \frac{V_0(e^{-as} - e^{-bs})}{R(s+\frac{1}{RC})}$$, tomando la inversa

$$I(t) = \frac{V_0}{R} L^{-1}\{\frac{e^{-as}}{s+\frac{1}{RC}} - \frac{e^{-bs}}{s+\frac{1}{RC}}\}$$

$$I(t) = \frac{V_0}{R}[e^{-\frac{t-a}{CR}} U_a(t) - e^{-\frac{t-b}{RC}} U_b(t)]$$

$$I(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < t < a \\ \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t-a}{RC}} & , \quad a < t < b \\ \frac{V_0}{R}[e^{-\frac{t-a}{RC}} - e^{-\frac{t-b}{RC}}] & , \quad t > b \end{cases}$$

4.8 Ejercicios y Problemas Propuestos.-

1) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=4e^{-2t}$, x(0) = -1 , $x'(0)=4$

Rpta. $x(t)=e^{-2t}(2t^2+2t-1)$

b) $\frac{d^2x}{dt^2}+x=6\cos 2t$, x(0) = 3 , $x'(0)=1$

Rpta. x(t) = 5 cos t - sen t - 2 cos 2t

c) $y''(t)-y(t)=5\,\text{sen}\,2t$, y(0) = 0 , $y'(0)=1$

Rpta. y(t) = 3 senh x - sen 2t

d) $y''(t)-2y'(t)+2y(t)=2\cos 2t-4\,\text{sen}\,2t$, y(0) = 0 , $y'(0)=1$

Rpta. y(t) = - cos 2t + cos t - sen t

e) $y''(t)-t\,y'(t)+y(t)=1$, y(0) = 1 , $y'(0)=2$

Rpta. y(t) = 1 + 2t

f) $t\,y''(t)+(-1-t)y'(t)+2y(t)=t-1$, y(0) = 0 , $y'(0)=1$

Rpta. y(t) = t

g) $\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}-2y=18e^{-t}\,\text{sen}\,3t$, y(0) = 0 , $y'(0)=3$

Rpta. $y=2e^{2t}-3e^{-t}-e^{-t}\,\text{sen}\,2t+e^{-t}\cos 3t$

h) $\frac{d^3y}{dt^3}-\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}-4y=-3e^t+4e^{2t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=5$, $y''(0)=3$

Rpta. $y=-\frac{27}{50}\cos 2t+\frac{57}{25}\operatorname{sen} 2t+\frac{3t\,e^t}{2}+\frac{e^t}{25}+\frac{e^{2t}}{2}$

2) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $\frac{d^3y}{dt^3}+2\frac{d^2y}{dt^2}-11\frac{dy}{dt}-12y=4$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$

Rpta. $y=\frac{e^{3t}}{21}-\frac{e^{-4t}}{21}+\frac{e^{-t}}{3}-\frac{1}{3}$

b) $t^2y''(t)-2y(t)=2$ **Rpta.** $y=-1-ct^2$

c) $y''(t)+2t\,y'(t)-4y(t)=6$, $y(0)=y'(0)=0$

Rpta. $y=3t^2$

d) $y''(t)-8t\,y'(t)+16y(t)=3$, $y(0)=y'(0)=0$

Rpta. $y=\frac{3}{2}t^2$

e) $y''(t)-4t\,y'(t)+4y(t)=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=10$

Rpta. $y = 10\,t$

f) $\frac{d^3y}{dt^3}+4\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+2y=10\cos t$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=3$

Rpta. $y=-e^{-2t}+2e^{-t}-2t\,e^{-t}-\cos t+2\operatorname{sen} t$

g) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = e^{-2t}\,\text{sen}\, t \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0$

Rpta. $y = \dfrac{1}{8}(\text{sen}\, t - \cos t) + \dfrac{e^{-2t}}{8}(\text{sen}\, t + \cos t)$

h) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 8y = 0 \quad , \quad y(0) = 3 \quad , \quad y'(0) = 6$

Rpta. $y = 2e^{4t} + e^{-2t}$

3) Resolver las siguientes Ecuaciones Diferenciales.

a) $t\,x''(t) - (4t-1)x'(t) + 2(2t+1)x(t) = 0$ si $x(0) = 0$

Rpta. $x(t) = \dfrac{k\,t^2 e^{-2t}}{2}$

b) $x\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dx} + xy = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 1$

Rpta. $y(0) = k\,J_0(x)$

c) $t\,x''(t) + x'(t) - a^2 t\,x(t) = 0 \quad , \quad x(0) = k \quad , \quad x'(0) = 0 \quad , \quad a \neq 0$

Rpta. $x(t) = c\,I_0(at)$

d) Resolver para V(t), si $\int_0^t V'(t)V(t-u)du = 24t^4$, $V(0) = 0$

Rpta. $V(t) = \pm 12t^2$

e) $t\,x''(t) + 3x'(t) + t\,x(t) = 0$ si $x(0) = \dfrac{1}{2}$ **Rpta.** $x(t) = \dfrac{J_1(t)}{t}$

f) $t^2y''(t)+(2t^2+t)y'(t)+(2t^2+t-1)y(t)=0$, si y(0) = 0 , $y'(0)=\frac{1}{2}$

Rpta. $y(t)=e^{-t}J_1(t)$

g) $y'''(t)-6y''(t)+12y'(t)-8y(t)=t^3e^{2t}+1$, y(0)=1, $y'(0)=-1$, $y''(0)=2$

Rpta. $y(t)=\frac{e^{2t}t^6}{5!}+e^{2t}(-\frac{e^{-2t}}{8}+\frac{t^2}{8}-\frac{t}{9}+\frac{1}{8})+e^{2t}-3t\,e^{-2t}+5t^2e^{-2t}$

h) $t^2V''(t)+t\,V'(t)+(t^2-1)V(t)=0$, V(1) = 2

Rpta. $V(t)=\frac{2J_1(t)}{J_1(1)}$

4) Resolver las siguientes Ecuaciones Diferenciales.

a) $y''(t)+4t(t)=9t$, y(0) = 0 , $y'(0)=7$

Rpta. $y(t)=\frac{9t}{4}+\frac{19}{8}\operatorname{sen}2t$

b) $y''(t)-3y'(t)+2y(t)=4t+12e^{-t}$, y(0) = 6 , $y'(0)=-1$

Rpta. $y(t)=3+2t+2e^{-t}-2e^{2t}+3e^{t}$

c) $y''(t)-4y'(t)+5y(t)=125t^2$, $y(0)=y'(0)=0$

Rpta. $y=22+40t+25t^2+2e^{2t}(2\operatorname{sen}t-11\cos t)$

d) $y''(t)+y(t)=8\cos t$, y(0) = 1 , $y'(0)=-1$

Rpta. $y(t)=\cos t-\operatorname{sen}t+4t\operatorname{sen}t$

e) $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4e^{2t}$

Rpta. $y(t) = c_1 e^{2t} + 4t\, e^{2t} + c_2 e^{t}$ donde $c_1 = y'(0) - y(0) - 4$, $c_2 = 2y(0) - y'(0) + 4$

f) $y''(t) + 9y(t) = 18t$, $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$

Rpta. $y(t) = 2t + \pi \operatorname{sen} 3t$

g) $y''(t) + 4y = F(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

donde $F(t) = \begin{cases} 1 \ , & 0 < t < 1 \\ 0 \ , & t > 1 \end{cases}$

Rpta. $y(t) = \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} + \frac{1}{4}[\cos(2t - 2) - \cos 2t]$, para $t > 1$

h) $y''(t9 + 4y(t) = F(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ si $F(t) = U(t - 2)$

Rpta. $y(t) = \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} + \frac{1}{4}(\cos(t - 2) - 1)$ si $t > 2$

i) $x'(t) + 3x(t) = e^{-2t}$, $x(0) = 0$ **Rpta.** $x(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$

j) $x'(t) - x(t) = \cos t - \operatorname{sen} t$, $x(0) = 0$ **Rpta.** $x(t) = \operatorname{sen} t$

k) $x'(t) + x(t) = 2 \operatorname{sen} t$, $x(0) = 0$ **Rpta.** $x(t) = e^{-t} - \cos t + \operatorname{sen} t$

l) $2x'(t) + 6x(t) = t\, e^{-3t}$, $x(0) = -\frac{1}{2}$ **Rpta.** $x(t) = \frac{t^2 - 2}{4} e^{-3t}$

5) Resolver las siguientes Ecuaciones Diferenciales.

a) $x''(t) + x(t) = 2e^{t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$ **Rpta.** $x(t) = e^{t} + \operatorname{sen} t$

b) $x'(t) - 3x(t) = 3t^3 + 3t^2 + 2t + 1$, x(0) = -1 **Rpta.** $-\frac{5}{9} - \frac{2}{3}t - t^3 - \frac{4}{9}e^{3t}$

c) $x''(t) + 2x'(t) = \frac{1}{7}(t - \frac{1}{4})e^{-2t}$, x(0) = 2 , $x'(0) = -\frac{1}{56}$

Rpta. $x(t) = 2 - \frac{t(2t+1)}{56}e^{-2t}$

d) $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = f(t)$, $y(0) = y'(0) = 0$, f(t) = U(t - 1)

Rpta. $y(t) = (\frac{e^{2(t-1)}}{2} - e^{t-1} + \frac{1}{2})U(t-1)$

e) $t\,y''(t) + (1-2t)y'(t) - 2y(t) = 0$, y(0) = 1 , $y'(0) = 2$

Rpta. $y(t) = e^{2t}$

f) $t\,y''(t) + (t-1)y'(t) - y(t) = 0$, y(0) = 5 , $y'(0) = 0$

Rpta. $y(t) = 5e^{-t}$

6) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $y'''(t) + 6y''(t) + 12y'(t) + 8y(t) = 0$, y(0) = 4 , $y'(0) = -12$, $y''(0) = 34$

b) $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = e^{-t}\operatorname{sen} t$, y(0) = 0 , $y'(0) = 1$

c) $y'' - 3y' + 2y' = 4t + e^{3t}$, y(0) = 1 , $y'(0) = -1$

d) $y'''(t) - 3y''(t) + 3y'(t) - y(t) = 0$, y(0) = 1 , $y'(0) = -1$, $y''(0) = -1$

e) $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = e^{-t}\operatorname{sen} t$, y(0) = 0 , $y'(0) = 1$

f) $y'''(t) - 3y''(t) - 4y'(t) + 12y(t) = 12e^{-t}$, y(0) = 4 , $y'(0) = 2$, $y''(0) = 18$

7) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $P\int_a^b x(t-u)x(u)du = 2x(t9 - \text{sen}\, pt$, $p \neq 0$ **Rpta.** $x(t) = J_1(pt)$

b) Si $L\{F(t)\} = H(s)$, resolver para x(t) la ecuación diferencial $x''(t) + 6x'(t) + 7x(t) = F(t)$ sujeto a $x(0) = x'(0) = 0$

Rpta. $x(t) = F(t) * \frac{e^{-3t}}{\sqrt{2}} \text{senh}(\sqrt{2}\, t)$

.c) $y''(t) + y(t) = F(t)$, donde $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

$$F(t) = \begin{cases} 0 \ , & t < \frac{3\pi}{2} \\ \cos t \ , & \frac{3\pi}{2} < t < \frac{5\pi}{2} \\ 0 \ , & t > \frac{5\pi}{2} \end{cases}$$

Rpta. $y(t) = \frac{1}{4}(\cos t.\text{sen}\, 2t - \text{sen}\, t - \cos 2t + \text{sen}\, t - 2t\cos t)$

d) $\int_0^t x''(u)x'(t-u)du = x'(t) - x(t)$ si $x'(0) = x'(0) = 0$

Rpta. $x(t) = t - \frac{t^2}{2}$

e) $5\int_0^t e^u \cos 2(t-u)x(u)du = e^t(x'(t) + x(t)) - 1$, $x(0) = 0$

Rpta. $x(t) = \frac{5}{2} - 4t\, e^t - \frac{5}{2}e^{-2t}$

f) $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = e^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Rpta. $y(t) = \frac{e^t}{5} + \frac{e^{-t}}{5}(3\,\text{sen}\, t - \cos t)$

g) $y'''(t)-3y''(t)+3y'(t)-y(t)=t^2e^t$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$, $y''(0)=-2$

Rpta. $y=e^t-t\,e^t-\dfrac{t^2}{2}e^t+\dfrac{t^5e^t}{60}$

h) $y'''(t)+y''(t)+4y'(t)+4y(t)=-2$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=-1$

Rpta. $y=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{e^{-t}}{5}+\dfrac{3}{10}\cos 2t+\dfrac{3}{5}\operatorname{sen} 2t$

8) Resolver la ecuación diferencial de segundo orden por Transformada de Laplace. $y''(t)+\alpha\, y'(t)+\beta\, y(t)=0$ donde $\alpha = 6$, $\beta = 9$, $y(0) = 0$, $y'(0)=0$

9) Resolver la ecuación diferencial de segundo orden por Transformada de Laplace. $y''(t)+\alpha\, y'(t)+\beta\, y(t)=Q(t)$ donde $\alpha = -1$, $\beta = -2$, $y(0) = 0$, $y'(0)=0$, $Q(t)=e^t+e^{-2t}$

10) Resolver la ecuación diferencial de segundo orden por Transformada de Laplace.
$F(t)y''(t)+R(t)y'(t)+S(t)y(t)=Q(t)$, donde $y(0) = 0$, $y'(0)$, $F(t)=4t^2$, $S(t)=(t^2+1)^2$, $Q(t) = 0$.

11) Resolver la siguiente ecuación diferencial mediante Transformada de Laplace.
$y''(t)-3y'(t)+2y(t)=f(t)$ donde $f(t)=\begin{cases}0 , & 0<t<1\\ 1 , & t>1\end{cases}$, $y(0)=y'(0)=0$

Rpta. $y(t)=(\dfrac{e^{2(t-1)}}{2}-e^{(t-1)}+\dfrac{1}{2})U(t-1)$

12) Resolver la ecuación diferencial dado por:

$t\,y''(t)+2y'(t)+t\,y(t)=0$, $y(0^+)=1$, $y(\pi)=0$

Rpta. $y(t)=\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$

13) Resolver la ecuación diferencial

$$y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = V(t), \quad y(0) = 1 \;, \quad y'(0) = 1$$

donde $V(t) = \begin{cases} e^{2t}\cos t & , \quad 0 < t < 2\pi \\ 0 & , \quad t > 2\pi \end{cases}$

Rpta. $y(t) = e^{2t}\cos t - e^{2t}\,\text{sen}\,t + \dfrac{t\,e^{2t}\,\text{sen}\,t}{2} - \dfrac{e^{2t}}{2}(t - 2\pi)\,\text{sen}\,t.U(t - 2\pi)$

14) Utilizando Transformada de Laplace resolver la ecuación diferencial

$$y' + 2y + \int_0^t y(t) = f(t), \text{ donde } \quad f(t) = \begin{cases} t & , \quad t < 1 \\ (2 - t) & , \quad 1 \le t \le 2 \\ 0 & , \quad t > 2 \end{cases}$$

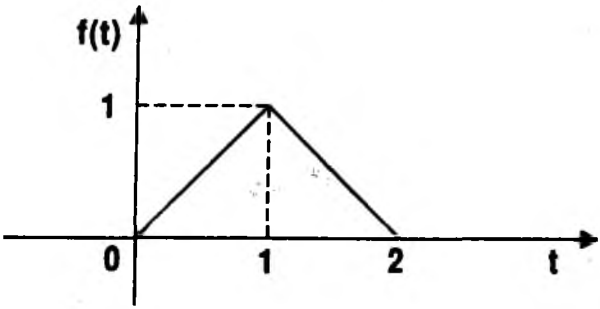
sujeto a la condición inicial y(0) = 1

15) Resolver la ecuación $y(t) = 4\,\text{sen}\,t - 2\int_0^t y(u)\,\text{sen}(t - u)du$

Rpta. $y(t) = \dfrac{4}{\sqrt{3}}\,\text{sen}\sqrt{3}\,t$

16) Resolver el problema siguiente de valor inicial

$y'(t) + 2y(t) + \int_0^t y(u)du = f(t)$; y(0) = 1 donde f es dado por el gráfico.



Rpta. $y(t) = -2t\,e^{-t} + 1 + 2[t\,e^{-(t-1)} - 1]U(t - 1) + [(1 - t)^{-(t-1)} + 1]U(t - 2)$

17) Resolver el siguiente problema de valor inicial.

$$y''(t)+4y(t)=\operatorname{sen} t - U(t-2\pi).\operatorname{sen}(t-2\pi)\ ,\quad y(0)=y'(0)=0$$

Rpta. $y(t)=\frac{1}{6}(-\operatorname{sen} 2t+2\operatorname{sen} t)+\frac{1}{6}(\operatorname{sen} 2t-2\operatorname{sen} t)U(t-2\pi)$

18) Resolver la ecuación diferencial

$$x''(t)-2x'(t)+5x(t)=e^{-2t}(4\cos 3t+18\operatorname{sen} 3t)\ ,\quad x(0)=2\ ,\quad x'(0)=-1$$

19) Resolver la ecuación diferencial

$x''(t)+n^2x(t)=a\operatorname{sen} pt$, $x(0)=1, x'(0)=3$ n,p constantes positivos , $n\neq p$

20) Resolver la ecuación diferencial.

$t\,y''(t)+y'(t)+t\,y(t)=0$ sujeto a las condiciones iniciales $y(0)=1$, $y'(0)=0$

21) Resolver la ecuación diferencial

$t\,x''(t)+x'(t)+4t\,x(t)=0$, con las condiciones iniciales $x(0)=3$, $x'(0)=0$

22) Calcular $L\{J_1(t)\}$ y usando el resultado obtenido, resolver la ecuación diferencial $x''(t)+x(t)=J_1(t)$ si $x(0)=1$, $x'(0)=4$ donde $L\{x(t)\}=x(s)$

23) Resolver la ecuación diferencial

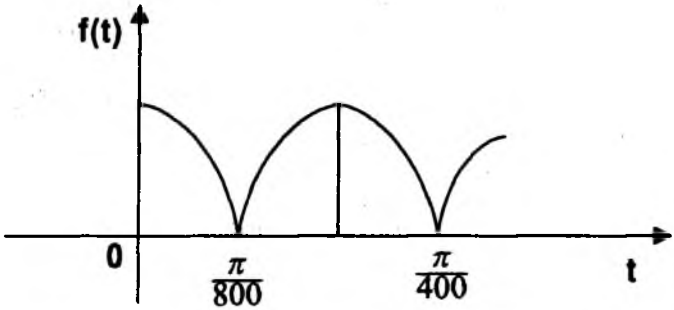
$$t^2y''(t)+t\,y'(t)+(t^2-1)y(t)=0\ ,\ \text{si } y(0)=0\ ,\quad y'(0)=\frac{1}{2}$$

24) Resolver $\int_0^t x'''(u)x''(t-u)du=24t^3$ si $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$

25) Resolver la ecuación diferencial

$$tV''(t)+(t-1)V'(t)-V(t)=0 \text{ si } V(0)=5 \text{ y } V(\infty)=0$$

26) Resolver la ecuación $x''(t)+2x'(t)+x(t)=F(t)$, $x(0)=x(0)=0$ si F(t) esta dado por el gráfico adjunto.

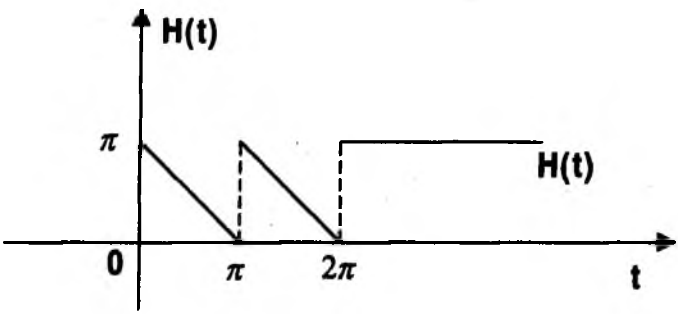


27) $t^2x''(t)+t(2t+1)x'(t)+(2t^2+t-1)x(t)=0$, $x(0)=0$, $x'(0)=\frac{1}{2}$

28) $x''(t)+3x'(t)+2x(t)=3t^2+e^{2t}\operatorname{sen}3t$, $x(0)=x'(0)=0$

29) $x''(t)+3x'(t)=1-2U(t-2\pi)$, $x(\pi)=0$, $x'(\pi)=-1$

30) $x''(t)-x'(t)=H(t)$, $x(0)=1$, $x'(0)=0$ si H(t) esta dado por el siguiente gráfico.



31) $t\,x''(t)+(2t+3)x'(t)+(t+3)x(t)=e^{-t}$ si $\mathbf{x(0)=1}$

32) $t\,y''(t)+y'(t)+t\,y(t)=0$, y(0) = 1 , $y'(0)=0$

33) $x''(t)+(2t-3)x'(t)+2x(t)=0$ si x(0) = 1 , $x'(0)=3$

34) $x''(t)+t\,x'(t)+x(t)=0$, t > 0, sujeto a las condiciones iniciales x(0) = 1 , $x'(0)=0$

35) $x''(t)+3x'(t)=1-2U_2(t)$ sujeto a las condiciones x(π) = 1 , $x'(\pi)=-1$

36) $(t-t^2)y''(t)+2y'(t)+2y(t)=6t$, si y(0) = y(2) = 0

37) $t^2y''(t)+t(1-t)y'(t)-(1+3t)y(t)=0$ sujeto a la condición y(0) = 1 , $y'(0)=4$

38) Resolver la ecuación diferencial

$$y''+4y=f(x) \quad \text{si} \quad f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } 0<x<\pi \\ 1-\operatorname{sen}3x & \text{si } x>\pi \end{cases} \qquad y(0)=1\,,\; y'(0)=1$$

Rpta.

$$f(x)=\cos 2x+\frac{\operatorname{sen}2x}{2}+\frac{1}{4}[1-\cos 2(x-\pi)]U(x-\pi)+(-\frac{\operatorname{sen}3(x-\pi)}{5}+\frac{3}{10}\operatorname{sen}3(x-\pi)U(x-\pi)$$

39) Hallar la función y = f(x) tal que:

$$f(x)=2\int_0^x f(u)\cos(x-u)du=e^x$$

Rpta. $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}-xe^{-x}=\cosh x-xe^{-x}$

40) Resolver las ecuaciones diferenciales.

a) $y''-y=\frac{1}{2}\int_0^x e^u u^2 du \quad , \quad y(0)=y'(0)=0$

Rpta. $y=\frac{e^x}{6}(\frac{x^3}{3}-\frac{9}{4}x^2+\frac{21}{4}x-\frac{45}{8})+1-\frac{e^{-x}}{16}$

b) $y''+2y'+2y=f(t)$ donde $f(t)=\begin{cases} 0 & , \ 0<t<\pi \\ e^{-t}\cos t & , \ \pi<t<2\pi \\ 0 & , \ t>2\pi \end{cases}$

Rpta.

$$y=e^{-t}[y(0)\cos t+(y(0)+y'(0))\operatorname{sen} t]+\frac{e^{-t}}{2}(t-\pi)U(t-\pi)-[\frac{e^{-t}}{2}(t-2\pi)\operatorname{sen} t]U(t-2\pi)$$

c) $y'+2y+2\int_0^x y(t)dt=f(t)$ donde $f(t)=\begin{cases} e^{-t}\cos t & , \ 0<t<\pi \\ 0 & , \ t>\pi \end{cases}$, y(0)

Rpta.

$$\begin{cases} \frac{e^{-t}}{2}(t\operatorname{sen} t-\operatorname{sen} t+t\cos t) & , \ 0<t<\pi \\ \frac{e^{-t}}{2}(t\operatorname{sen} t-\operatorname{sen} t+\cos t)+\frac{e^{-t}}{2}[(t-\pi)(\cos t-\operatorname{sen} t)+\operatorname{sen} t] & , \ t>\pi \end{cases}$$

d) $y''-4y'+5y=f(t)$, y(0) = 1 , $y'(0)=1$ donde $f(t)=\begin{cases} e^{2t}\operatorname{sen} t & , \ 0<t<2\pi \\ 0 & , \ t>2\pi \end{cases}$

Rpta. $\begin{cases} e^{2t}\cos t-e^{2t}\operatorname{sen} t+e^{2t}\frac{t\operatorname{sen} t}{2} & , \ 0<t<\pi \\ e^{2t}\cos t-e^{2t}\operatorname{sen} t+\pi e^{2\pi}\operatorname{sen} t & , \ t>2\pi \end{cases}$

4f) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales.

a) $\begin{cases} x''(t)-3x'(t)-y'(t)+2y(t)=14t+3 \\ x'(t)-3x(t)+y'(t)=1 \end{cases}$, $x'(0)=0$, $y'(0)=6.5$

Rpta. $\begin{cases} x(t)=2-\dfrac{e^t}{2}-\dfrac{e^{3t}}{2}-e^{-2t} \\ y(t)=7t+5-e^t+\dfrac{5}{2}e^{-2t} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x'(t)+2x(t)+y'(t)-y(t)=3t \\ x'(t)+x(t)+y'(t)+y(t)=1 \end{cases}$, x(0) = 1 , y(0) = 3

Rpta. $\begin{cases} x(t)=t+3e^{-t}-2e^{-3t} \\ y(t)=1-t+2e^{-3t} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x''(t)+2x(t)-y'(t)=2t+5 \\ x'(t)-x(t)+y'(t)+y(t)=-2t-1 \end{cases}$, x(0) = 3 , $x'(0)=0$, y(0) = -3

Rpta. $\begin{cases} x(t)=t+2+e^{-2t}+\operatorname{sen} t \\ y(t)=1-t-3e^{-2t}-\cos t \end{cases}$

d) $\begin{cases} x'(t)-2x(t)-y'(t)-y(t)=6e^{3t} \\ 2x'(t)-3x(t)+y'(t)-3y(t)=6e^{3t} \end{cases}$, x(0) = 3 , y(0) = 0

Rpta. $\begin{cases} x(t)=(1+2t)e^t+2e^{3t} \\ y(t)=(1-t)e^t-e^{3t} \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+x+y=3e^{-3t} \\ \dfrac{dy}{dt}+x-4y=1 \end{cases}$, x(0) = 1 , y(0) = 2

Rpta. $\begin{cases} x(t) = 3e^{-2t} - \dfrac{69}{40}e^{5t} - \dfrac{7}{8}e^{-3t} + \dfrac{3}{5} \\ y(t) = \dfrac{e^{-2t}}{2} + \dfrac{69}{40}e^{5t} - \dfrac{e^{-3t}}{8} - \dfrac{1}{10} \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - x - y = e^{-t} \quad , \quad x(0) = 2 \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2x + y = e^{t} \quad , \quad y(0) = 1 \end{cases}$

Rpta. $\begin{cases} x = 8\,\text{sen}\,t + 2\cos t \\ y = -13\,\text{sen}\,t + \cos t + \dfrac{e^{t}}{2} - \dfrac{e^{-t}}{2} \end{cases}$

g) $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 3\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2x - y = 0 \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 2x + y = 0 \end{cases}$, x(0) = 0 , y(0) = -1 , $x'(0) = 0$

Rpta. $\begin{cases} x = 2e^{t} - e^{2t} - 1 \\ y = e^{t} - 2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} y' + y + 2z' + 3z = e^{-t} \\ 3y' - y + 4z' + z = 0 \end{cases}$, y(0) = 0 , z(0) = 1

Rpta. $\begin{cases} y = 5e^{t} - 3e^{-t} - 2e^{-2t} \\ z = e^{-2t} + \dfrac{2e^{-t}}{2} - e^{t} \end{cases}$

42) Resolver el sistema de ecuación diferencial.

$\begin{cases} t\,y(t) + z(t) + t\,z'(t) = (t-1)e^{-t} \\ y'(t) - z(t) = e^{-t} \end{cases}$ sujeta a las condiciones iniciales: y(0) = 1, z(0) = -1

43) Resolver el sistema de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} 2x'(t) - 3y'(t) = 2e^t & , \quad x(0) = 2 \\ x'(t) - 2y'(t) = 0 & , \quad y(0) = 1 \end{cases}$$

Rpta. $x(t) = 4e^t - 2$, $y(t) = 2e^t - 1$

44) Resolver el sistema de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) + 2y(t) = 0 & , \quad x(0) = 1 \\ 3x(t) + 2y(t) + y'(t) = 0 & , \quad y(0) = 2 \end{cases}$$

Rpta. $x(t) = \dfrac{6}{5e^{-4t}} - \dfrac{1}{5e^t}$, $y(t) = \dfrac{9}{5e^{-4t}} + \dfrac{e^t}{5}$

45) Resolver el sistema de la ecuación diferencial.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y + e^t & , \quad x(0) = 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x - t & , \quad y(0) = 1 \end{cases}$$

46) Resolver el sistema de la ecuación diferencial.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y & , \quad x(0) = -1 \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - y & , \quad y(0) = 2 \end{cases}$$

Rpta. $x = -3\cos 3t - \dfrac{5}{3}\operatorname{sen} 3t$, $y = 2\cos 3t - \dfrac{7}{3}\operatorname{sen} 3t$

47) Resolver el sistema de la ecuación diferencial.

$$\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}-2x=1 & , \quad x(0)=0 \\ \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}-3x-3y=2 & , \quad y(0)=0 \end{cases}$$

Rpta. $x=-2e^{3t}+\dfrac{5}{2}e^{2t}-\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{8}{3}e^{3t}-\dfrac{5}{2}e^{2t}-\dfrac{1}{6}$

48) Resolver el sistema de la ecuación diferencial.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+x-y=0 & , \quad x(0)=0 \quad , \quad x'(0)=-2 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}+y-x=0 & , \quad y(0)=0 \quad , \quad y'(0)-1 \end{cases}$$

Rpta. $x=-\dfrac{t}{2}-\dfrac{3}{4}\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t$, $y=-\dfrac{t}{2}+\dfrac{3}{4}\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t$

49) Resolver el sistema de la ecuación diferencial.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{d^2y}{dt^2}=t^2 & , \quad x(0)=8 \quad , \quad x'(0)=0 \\ \dfrac{d^2x}{dt^2}-\dfrac{d^2y}{dt^2}=4t & , \quad y(0)=0 \quad , \quad y'(0)=0 \end{cases}$$

Rpta. $x=8+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{t^4}{4!}$, $y=-\dfrac{2t^3}{3!}+\dfrac{t^4}{4!}$

50) Resolver el sistema de la ecuación diferencial.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 3y = 0 \quad , \quad x(0) = 0 \quad , \quad x'(0) = 2 \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} + 3y = t\,e^{-t} \quad\quad , \quad y(0) = 0 \end{cases}$$

Rpta. $x = \dfrac{t^2}{2} + t + 1 - e^{-t}$, $y = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}e^{-t} + \dfrac{1}{3}t\,e^{-t}$

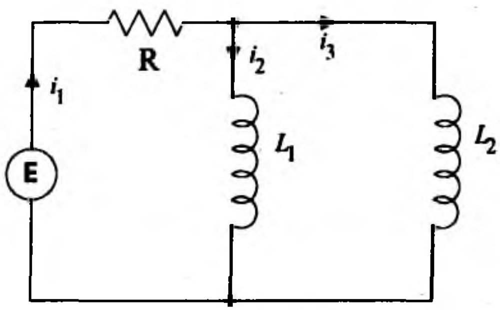
51) Resolver el sistema de la ecuación diferencial.

a) Demuestre que el sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente a las corrientes $i_2(t)$ e $i_3(t)$ de la red mostrada en la Figura , es

$$L_1\frac{di_2}{dt} + Ri_2 + Ri_3 = E(t)$$
$$L_2\frac{di_3}{dt} + Ri_2 + Ri_3 = E(t)$$

b) Resuelva el sistema de la parte (a) si R = 5Ω, $L_1 = 0.01\,H$, $L_2 = 0.0125\,H$, E = 100V, $i_2(0) = 0$ e $i_3(0) = 0$.

c) Determine el valor en amperes (A) de la corriente $i_1(t)$.



Rpta. $i_2 = \dfrac{100}{9} - \dfrac{100}{9}e^{-900t}$, $i_3 = \dfrac{80}{9} - \dfrac{80}{9}e^{-900t}$, $i_1 = 20 - 20e^{-900t}$

51)

a) Demuestre que el sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente a las corrientes $i_2(t)$ e $i_3(t)$ de la red mostrada en la figura es,

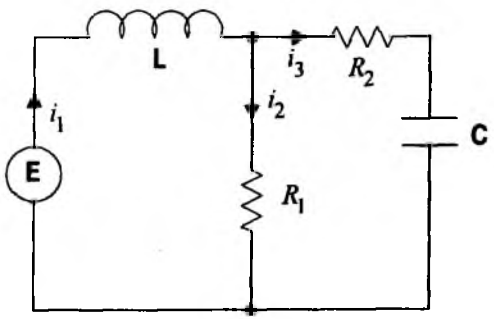
$$L\frac{di_2}{dt} + L\frac{di_3}{dt} + R_1 i_2 = E(t)$$

$$-R_1\frac{di_2}{dt} + R_2\frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C}i_3 = 0$$

b) Resuelva el sistema de la parte (a) si $R_1 = 10\Omega$, $L_1 = 1H$, C = 0.2 F,

$$E(t) = \begin{cases} 120, & 0 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{cases}$$

c) Determine la corriente $i_1(t)$ en amperes (A).



APENDICE

DERIVADAS ELEMENTALES

1) $$y = f(x) = c \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$$

2) $$y = kf(x) = c \Rightarrow \frac{dy}{dx} = kf'(x)$$

3) $$y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) \pm g(x)$$

4) $$y = f(x) = x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) = nx^{n-1}$$

5) $$y = f(x).g(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

6) $$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{g(x)^2}$$

7) $$y = (f(x))^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = n(f(x))^{n-1}.f'(x)$$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS Y SUS INVERSAS

1) $$y = \mathrm{sen}(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos(f(x)).f'(x)$$

2) $$y = \cos(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\mathrm{sen}(f(x)).f'(x)$$

3) $$y = \mathrm{tg}(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sec^2(f(x)).f'(x)$$

4) $y = c\,\mathrm{tg}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\mathrm{cosec}^2(f(x)).f'(x)$

5) $y = \sec(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \sec(f(x)).\mathrm{tg}(f(x)).f'(x)$

6) $y = \mathrm{cosec}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\mathrm{cosec}(f(x)).c\,\mathrm{tg}(f'(x)).f'(x)$

7) $y = arc.\mathrm{sen}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$

8) $y = arc.\cos(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$

9) $y = arc.\mathrm{tg}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$

10) $y = arc.c\,\mathrm{tg}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-f'(x)}{1+f^2(x)}$

11) $y = arc.\sec(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{|f(x)|\sqrt{f^2(x)-1}}$

12) $y = arc.\mathrm{cosec}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-f'(x)}{|f(x)|\sqrt{f^2(x)-1}}$

DERIVADA DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

1) $y = \log_a(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\log_a e}{f(x)}.f'(x), \qquad a \neq 0,1$

2) $y = \ln(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

3) $y = a^{f(x)} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = a^{f(x)}.Ln\ a.f'(x)$

4) $y = e^{f(x)} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = e^{f(x)}.f'(x)$

5) $y = (f(x)^{g(x)} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = g(x)(f(x))^{g(x)-1}.f'(x) + (f(x))^{g(x)} \ln(f(x)).g'(x)$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS Y SUS INVERSAS

1) $y = \operatorname{senh}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \cosh(f(x)).f'(x)$

2) $y = \cosh(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \operatorname{senh}(f(x)).f'(x)$

3) $y = \operatorname{tgh}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sec}h^2(f(x)).f'(x)$

4) $y = c\operatorname{tgh}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\cos ech^2(f(x)).f'(x)$

5) $y = \sec h(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\sec h(f(x)).\operatorname{tgh}(f(x)).f'(x)$

6) $y = \cos eh(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\cos ech(f(x)).c\operatorname{tgh}(f(x)).f'(x)$

7) $y = arc.\operatorname{senh}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}$

8) $y = arc.\cosh(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\pm f'(x)}{\sqrt{f^2(x)-1}}$

9) $y = arc.\operatorname{tgh}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{1-f^2(x)}$, $- < f(x) < 1$

10) $y = arc.c\text{tgh}(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{1-f^2(x)}$, $(f(x)) > 1$

11) $y = arc.\text{sec}h(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\pm f'(x)}{f(x)\sqrt{1-f^2(x)}}$

12) $y = arc.\cos ech(f(x)) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-f'(x)}{|f(x)|\sqrt{1+f^2(x)}}$

TABLA DE INTEGRALES

1) $\int a\,dx = ax + c$

2) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

3) $\int d(f(x)) = f(x) + c$

4) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

5) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$

6) $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$

7) $\int \dfrac{du}{u} = Ln|u| + c$

8) $\int e^u du = e^u + c$

9) $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c, \quad a > 0, \quad a \neq 1$

10) $\int \dfrac{du}{a^2+u^2} = \dfrac{1}{a}\text{arctg}\dfrac{u}{a} + c$

11) $\int \dfrac{du}{u^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}Ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + c$

12) $\int \dfrac{du}{a^2-u^2} = \dfrac{1}{2a}Ln\left|\dfrac{u+a}{u-a}\right| + c$

13) $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arc.\text{sen}(\dfrac{u}{a}) + c$

14) $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = Ln\left|u + \sqrt{u^2+a^2}\right| + c$

15) $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = Ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right| + c$

16) $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2} arc.\operatorname{sen}\frac{u}{a} + c$

17) $\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2} Ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + c$

18) $\int \sqrt{u^2+a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+a^2} + \frac{a^2}{2} Ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + c$

19) $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + c$

20) $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + c$

21) $\int \operatorname{tg} u\,du = -Ln|\cos u| + c$

22) $\int c\operatorname{tg} u\,du = Ln|\operatorname{sen} u| + c$

23) $\int \sec u\,du = Ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + c$

24) $\int \cos ec u\,du = Ln|\cos ec u - c\operatorname{tg} u| + c$

25) $\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tg} u + c$

26) $\int \cos ec^2 u\,du = -c\operatorname{tg} u + c$

27) $\int \sec u \;\operatorname{tg} u\; du = \sec u + c$

28) $\int \cos ec u . c\operatorname{tg} u\,du = -\cos ec u + c$

29) $\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u + c$

30) $\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u + c$

31) $\int \operatorname{tgh} u\,du = Ln|\cosh u| + c$

32) $\int c\operatorname{tgh} u\,du = Ln|\sec hu| + c$

33) $\int \sec h^2 u\,du = \operatorname{tgh} u + c$

34) $\int \cos ech^2 u\,du = -c\operatorname{tgh} u + c$

35) $\int \sec hu.\operatorname{tgh} u\,du = -\sec hu + c$

36) $\int \cos ech\; u.c\operatorname{tgh} u\,du = -\cos ech\; u + c$

37) $\int e^{au}\operatorname{sen}(bu)\,du = e^{au}\frac{(a\operatorname{sen}(bu) - b\cos(bu))}{a^2+b^2} + c$

38) $\int e^{au}\cos(bu)\,du = e^{au}\frac{(a\cos bu + b\operatorname{sen}(bu))}{a^2+b^2} + c$

BIBLIOGRAFIA

1. Matemática Superior para Ingeniería por: C.R. WYLLER.TR.

2. Transformada de Laplace por: MURRAY R. SPIEGEL.

3. Introducción to the Laplace Transfor por: HOLL, D.C. MAPLE Y B. WINDOGRADE.

4. Matemática avanzada para Ingeniería por: ERWIN KREYSZIG, Tomo I, Tomo II.

5. Matemática avanzada para Ingeniería por: PETER V. ONEIL

6. Ecuaciones Diferenciales y problemas con condiciones en la frontera por:
   C.H. EDWARDS, Jr.
   DAVID E. PENNEY.

7. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones por: DENNIS G. ZILL.

8. Introducción al Análisis Lineal por: KREIDER - KULLER - OSTBERG - PERKINS.

9. Ecuaciones diferenciales con Aplicaciones por: WILLIAMS R. DEREICA - STANLAG I - GROSSMAN.

10. Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la frontera por: WILLIAM E. BOYCE - RICHARD. C. PRIMA.

11. Ecuaciones Diferenciales Elementales por: EARL D. RAINVILLE.

12. Curso de Matemática Superior Tomo IV por: J. QUINET.

13. Ecuaciones Diferenciales por: KREIDER - KULLER - OSTBERG.

14. Ecuaciones Diferenciales Por: SHEPLEY L. ROSS.

PEDIDOS AL POR MAYOR Y MENOR

AV. GERARDO UNGER N° 247 OF. 202
Urbanización Ingeniería (Frente a la UNI)
Teléfono: 388-8564 – 9853-3465 - 9852- 0506 - 9853-6406

LIMA – PERU

IMPRESO EN:

EDITORIAL SERVICIOS GRAFICOS J.J